



# Un théorème de compacité en théorie des familles génératrices

---

Cyril Falcon

Jeudi 10 septembre 2020, Séminaire de Topologie et Dynamique (LMO)

LMO (Faculté des Sciences d'Orsay)

## Contexte et motivation

**Motivation.** Comprendre les déformations (*isotopies*) des *sous-variétés legendriennes* dans les *variétés de contact*.

↪ généralisation et raffinement de la *théorie des nœuds*.

**Approche locale.** (Traynor, 2001) Un germe de sous-variété legendrienne est donné par une *famille génératrice* qui la décrit comme le graphe d'une fonction multivaluée.

↪ exploiter la *théorie de Morse* pour construire des invariants homologiques par isotopie legendrienne.

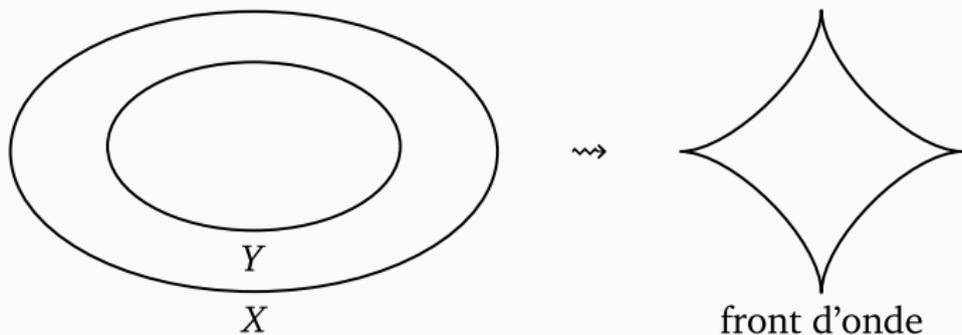
**Mon travail.** Mieux appréhender les trajectoires de gradient qui contribuent au calcul de la différentielle de cette homologie en m'appuyant sur une conjecture de Henry et Rutherford en 2013.

↪ fait émerger un *théorème de compacité*.

# Un exemple introductif en optique géométrique I

## Données.

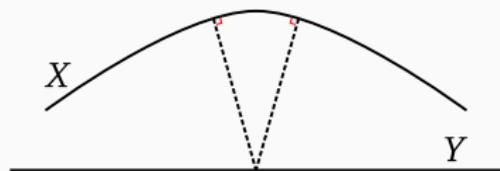
- Un espace ambiant :  $\mathbf{R}^n$  muni de la métrique euclidienne.
- Des sources lumineuses :  $X$  une sous-variété de  $\mathbf{R}^n$  dont chaque point émet isotropiquement.
- Des observateurs :  $Y$  une sous-variété de  $\mathbf{R}^n$ .



Une équidistante d'une ellipse.

## Un exemple introductif en optique géométrique II

La famille de fronts d'onde émis par  $X$  est généralement **multivaluée** sur  $Y$ , car plusieurs rayons issus de  $X$  peuvent intersecter  $Y$  en un même point :



mais elle détermine une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  de  $J^1(Y)$  décrite par une famille génératrice :

$$\Lambda = \left\{ \left( y, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y), F(x, y) \right) ; \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \right\},$$

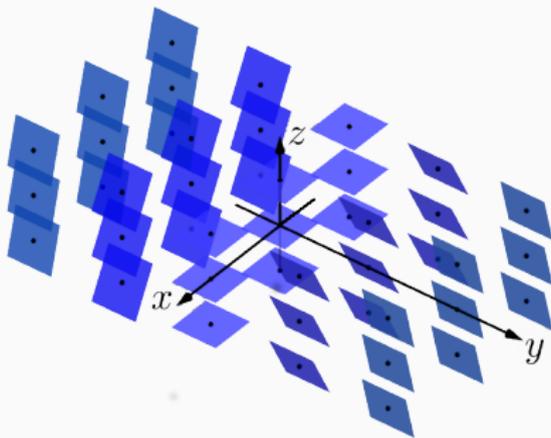
où  $F$  est le chemin optique (principe de Fermat).

# Rigidité des sous-variétés legendriennes

---

## Structure de contact standard

La *forme de contact standard* de  $J^1(M) = T^*M_{(q,p)} \times \mathbf{R}_z$  est donnée par  $\alpha_0 = dz - p dq$ , son noyau est la *structure de contact standard*  $\xi_0$  de  $J^1(M)$ .



**Observation.** Le champ de vecteurs  $\partial_z$  engendre  $\ker(d\alpha_0)$  et satisfait  $\alpha_0(\partial_z) = 1$ , c'est le *champ de Reeb* de  $\alpha_0$ .

# Sous-variétés legendriennes

## Proposition

Soit  $L$  une sous-variété de  $J^1(M)$ , si  $L$  est partout tangente à  $\xi_0$ , c'est-à-dire  $TL \subset \xi_0$ , ou encore  $\alpha_0|_L \equiv 0$ , alors  $\dim(L) \leq \dim(M)$ .

La distribution  $\xi_0$  **minimise**, parmi les champs d'hyperplans tangents de  $J^1(M)$ , la dimension des sous-variétés qui leur sont partout tangentes.

## Définition

Une sous-variété  $\Lambda$  de  $(J^1(M), \xi_0)$  est *legendrienne* si  $\Lambda$  est partout tangente à  $\xi_0$  et  $\dim(\Lambda) = \dim(M)$ .

Les legendriennes de  $(J^1(M), \xi_0)$  **maximisent** la dimension des sous-variétés de  $J^1(M)$  qui sont partout tangentes à  $\xi_0$ .

## Définition

Une *corde de Reeb* de  $\Lambda$  est une trajectoire non constante du champ de Reeb qui débute et termine sur  $\Lambda$ .

# Front d'une sous-variété legendrienne I

**Problème.** Comment représenter  $\Lambda$  de dimension  $n$  en dimension ambiante  $2n + 1$  (grande codimension)?

**Solution.** Considérer le *front* de  $\Lambda$  qui est l'image de  $\Lambda$  par la projection  $(q, p, z) \mapsto (q, z)$ .

## Proposition

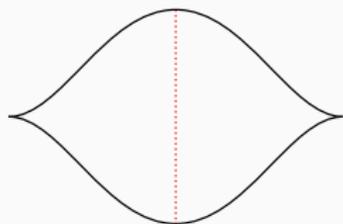
Les singularités du front de  $\Lambda$  forment *génériquement* une sous-variété *stratifiée* de codimension 1, mais l'espace tangent au front est défini partout et n'est jamais vertical, de sorte que

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial q_i}.$$

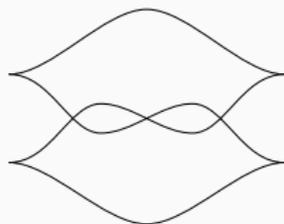
Réciproquement, une partie de  $J^1(M)$  qui satisfait ces propriétés est le front d'une unique sous-variété legendrienne de  $J^1(M)$ .

## Front d'une sous-variété legendrienne II

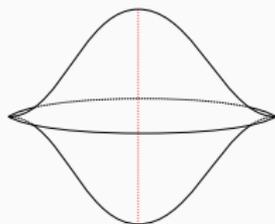
Les sous-variétés legendriennes sont régulières, mais leurs fronts peuvent être singuliers :



Nœud trivial  $\subset J^1\mathbb{R}$



Nœud de trèfle  $\subset J^1\mathbb{R}$



Sphère triviale  $\subset J^1\mathbb{R}^2$

Les cordes de Reeb correspondent aux paires de points verticalement alignés du front en lesquels les espaces tangents au front sont parallèles.

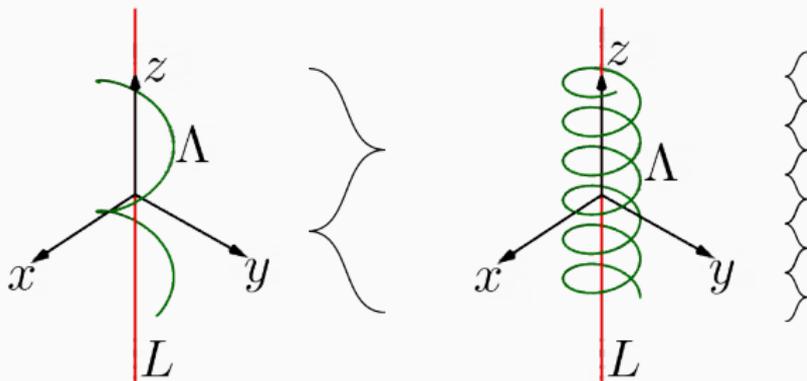
# De la rigidité legendrienne I

Toute sous-variété lisse de  $J^1(M)$  de dimension  $\dim(M)$  est  $C^0$ -proche d'une sous-variété legendrienne  $\rightsquigarrow$  **abondance**!

Par contre, ces approximations sont multiples :

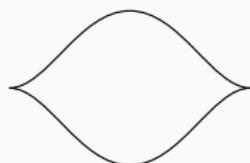
## Théorème (folklore)

Soit  $\Lambda$  une sous-variété legendrienne de  $(J^1(M), \xi_0)$ , la classe d'isotopie lisse de  $\Lambda$  **se scinde** en une **infinité** de classes d'isotopie legendrienne distinctes.

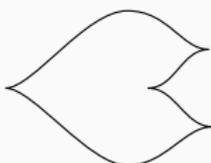


## De la rigidité legendrienne II

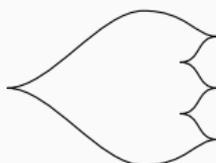
La topologie algébrique permet de construire des **invariants classiques**  $(r, \text{tb})$  qui suffisent à établir le théorème.



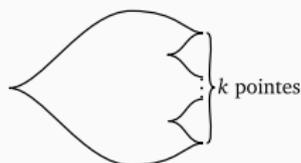
$$(r, \text{tb}) = (0, -1)$$



$$(r, \text{tb}) = (-1, -2)$$



$$(r, \text{tb}) = (-2, -3)$$



$$(r, \text{tb}) = (-k, -k-1)$$

Les sous-variétés legendriennes sont **petites** ( $\text{codim} = n + 1$ ), mais elles sont **encombrantes** (difficiles à isotoper).

↪ comportement riche et surprenant!

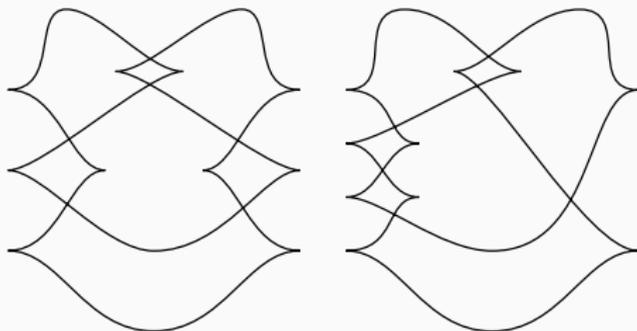
**Rigidité** : absence d'obstructions topologiques ne suffit pas à garantir l'existence d'une isotopie legendrienne.

## De la rigidité legendrienne III

Ces invariants sont néanmoins **insuffisants** pour attaquer efficacement la classification des sous-variétés legendriennes.

### **Théorème (Tchekanov, 2002)**

*Les nœuds legendriens de  $\mathbf{R}^3$  qui sont des miroirs de  $5_2$  (donc isotopes comme nœuds topologiques) suivants :*



*ont même  $(r, tb)$ , mais ne sont pas legendriennement isotopes.*

# Homologie pour les familles génératrices

---

# Familles génératrices

## Définition

Soit  $f: M_x \times \mathbf{R}^N_\eta \rightarrow \mathbf{R}$ , alors  $f$  est une *famille génératrice* si  $\mathbf{0}$  est une valeur régulière de  $\frac{\partial f}{\partial \eta}: M \times \mathbf{R}^N \rightarrow (\mathbf{R}^N)^*$ .

**Observation.** Si  $f$  est une famille génératrice, alors

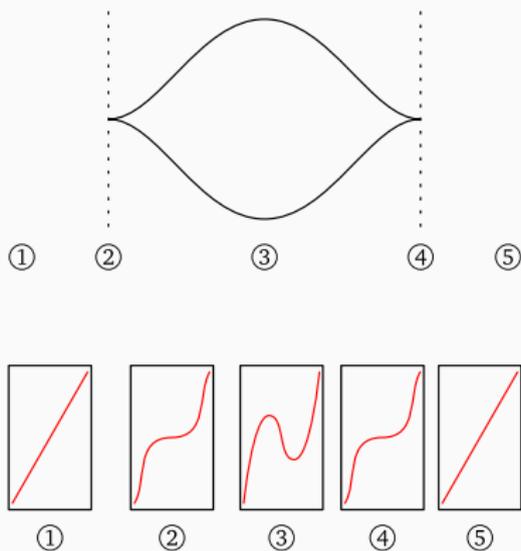
$$\left\{ \left( x, \frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta), f(x, \eta) \right) \mid (x, \eta) \in \frac{\partial f}{\partial \eta}^{-1}(\mathbf{0}) = \Sigma_f \right\},$$

est une sous-variété legendrienne **immergée** de  $(J^1(M), \xi_0)$ .

**Attention!** Une famille génératrice pour  $\Lambda$  n'existe pas toujours, mais c'est **localement** toujours le cas.

## Deux exemples de familles génératrices

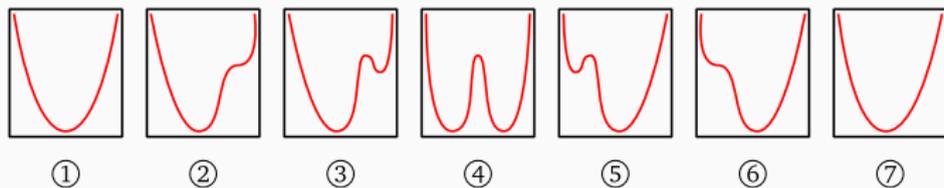
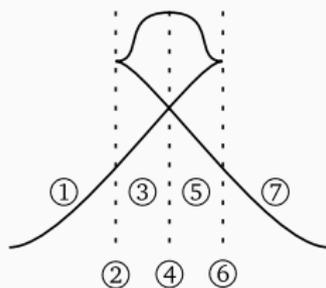
Le front de  $\Lambda$  est obtenu en traçant les valeurs critiques de  $f_x$  en fonction de  $x$ , c'est le **diagramme de Cerf** de  $f$ .



Les **pointes** du front correspondent aux **naissances** et **morts** de points critiques dans la famille  $x \mapsto f_x$ .

## Deux exemples de familles génératrices

Le front de  $\Lambda$  est obtenu en traçant les valeurs critiques de  $f_x$  en fonction de  $x$ , c'est le **diagramme de Cerf** de  $f$ .



Les **croisements** du front correspondent à l'**échange** de deux valeurs critiques dans la famille  $x \mapsto f_x$ .

# Équivalence des familles génératrices

Il existe deux opérations naturelles pour **modifier** une famille génératrice sans changer la sous-variété legendrienne décrite :

- **Difféomorphisme fibré.**  
↪ **déformer** le lieu fibrement critique.
- **Stabilisation.**  
↪ **augmenter** la dimension de la fibre.

Si deux familles génératrices sont égales à des suites finies de difféomorphismes fibrés et de stabilisations près appliquées à l'une et à l'autre, alors elles sont *équivalentes*.

# Persistence des familles génératrices

Ces opérations sont cruciales pour le résultat suivant :

## **Théorème (Tchekanov, 1996)**

*L'existence d'une famille génératrice **persiste** aux isotopies legendriennes et sa classe d'équivalence est **préservée**.*

**Principe général.** Chaque invariant des familles génératrices permet de construire un invariant des sous-variétés legendriennes sous-jacentes.

Il suffit d'en prendre l'union sur toutes les classes d'équivalence de familles génératrices, ce qui reste **difficile**.

## **Exemple**

Le nombre de classes d'équivalence de familles génératrices est un invariant legendrien.

# Fonction différence

## Définition

Soit  $f_1, f_2: M \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  deux familles génératrices de  $\Lambda$ , alors leur *fonction différence*  $\delta_{f_1, f_2}: M \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  est définie par :

$$\delta_{f_1, f_2}(x, \eta_1, \eta_2) = f_1(x, \eta_1) - f_2(x, \eta_2).$$

**Observation.** En restriction à  $S = \Sigma_{f_1} \times_M \Sigma_{f_2}$ ,  $\delta_{f_1, f_2}$  mesure la longueur verticale entre deux *branches* du front de  $\Lambda$ .

## Proposition

*Les points critiques de valeurs critiques strictement positives de  $\delta_{f_1, f_2}$  sont en bijection avec les cordes de Reeb de  $\Lambda$ .*

C'est un appel à la **théorie de Morse**!

# Homologie pour les familles génératrices I

**Construction.** (Traynor, 2001) Le complexe d'une paire de famille génératrices  $(f_1, f_2)$  de  $\Lambda$  est défini comme suit :

- $C_\bullet(f_1, f_2)$  est l'espace vectoriel engendré sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  par les **points critiques** de  $\delta_{f_1, f_2}$  de valeur critique strictement positive et dont l'**indice de Morse** est  $\bullet - N - 1$ ,  
 $\rightsquigarrow$  assure l'invariance par stabilisation.
- et le bord d'une chaîne  $q$  se calcule ainsi :

$$\partial_{f_1, f_2} q = \sum_{p \in C_{|q|-1}} \#_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} (\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g) / \mathbf{R}) p,$$

où  $\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g)$  est l'espace de modules des trajectoires d'antigradient de  $\delta_{f_1, f_2}$  pour la métrique  $g$  qui joignent  $q$  à  $p$ , muni d'une action par translation de  $\mathbf{R}$ .

L'homologie de  $(f_1, f_2)$  est  $\text{HFG}_\bullet(f_1, f_2) = \ker(\partial_{f_1, f_2}) / \text{im}(\partial_{f_1, f_2})$ .

# Homologie pour les familles génératrices II

Cette homologie permet de **distinguer** les nœuds de Tchekanov (Fuchs-Rutherford, 2011).

**Question.** Comment calculer HFG ?

**Difficulté.** Les trajectoires qui interviennent dans le calcul de  $\partial_{f_1, f_2}$  ne sont pas tracées directement sur  $\Lambda$ , mais plutôt sur un fibré vectoriel dans lequel  $\Lambda$  se **plonge** via  $(f_1, f_2)$ .

↪ différence majeure avec la théorie de Morse classique.

↪ plongement **non canonique** et **non géométrique**  $\implies$  plusieurs paires de familles génératrices de  $\Lambda$  peuvent avoir des **homologies différentes**.

# Dégénérescence de Henry et Rutherford

---

# Stratégie de Henry et Rutherford

**Idée.** « Écraser » les trajectoires d'antigradient de  $\delta_{f_1, f_2}$  sur  $S$ .

**Stratégie** (Henry-Rutherford, 2013) Pour  $s \in ]0, 1]$ ,  $g_n$  une métrique riemannienne sur  $M$  et  $g_N$  une métrique riemannienne sur  $\mathbf{R}^N$ , introduire

$$g_s = (s^{-1}g_n) \oplus g_N \oplus g_N,$$

et comprendre  $\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s)$  quand  $|q| = |p| + 1$  et  $s \rightarrow 0$ .

# Escaliers de gradient I

**Observation.** Soit  $m \in M \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$  :

- si  $m \notin S$ , alors  $\lim_{s \rightarrow 0} -\nabla_{g_s} \delta(m)$  est dirigé selon  $\mathbf{R}^{2N}$ ,  
 $\rightsquigarrow$  déplacement dans la fibre : **fragment vertical**.
- si  $m \in S$ , alors  $\lim_{s \rightarrow 0} -s^{-1} \nabla_{g_s} \delta(m)$  est tangent à  $S$  en  $m$ .  
 $\rightsquigarrow$  déplacement sur  $S$  : **fragment horizontal**.

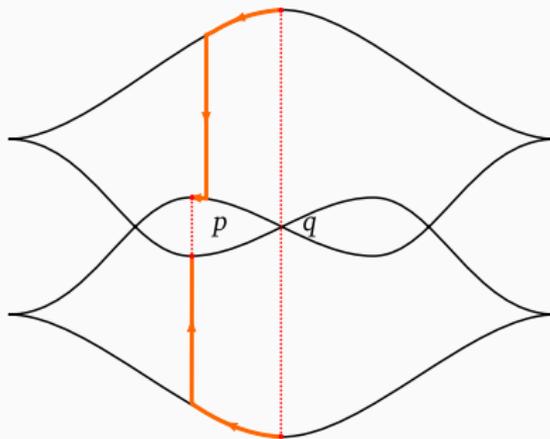
Un candidat pour décrire  $\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s)$  quand  $s \rightarrow 0$  est :

## Définition (F.)

Un *escalier de gradient* est une concaténation de trajectoires de gradient consécutives qui alternent entre *fragments horizontaux* et *fragments verticaux*.

## Escaliers de gradient II

Un exemple d'escalier sur le nœud de trèfle standard de  $\mathbf{R}^3$  :



L'ensemble des escaliers de  $q$  à  $p$  est noté  $\mathcal{M}^{\text{esc}}(q, p)$ .

# Conjecture des escaliers

## Conjecture (Bourgeois-F.)

Si  $\Lambda$  est *générique*, alors pour  $|q| = |p| + 1$ , il existe  $0 < s_0 \leq 1$  tel que pour  $0 < s \leq s_0$ ,  $\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s)$  et  $\mathcal{M}^{\text{esc}}(q, p)$  sont en correspondance bijective.

**Conséquence.**  $\text{HFG}_\bullet(f)$  se calcule en « comptant » des escaliers de gradient, ce qui est plus commode :

- front de  $\Lambda \rightsquigarrow$  parties horizontales,
- glissements d'anse de  $f \rightsquigarrow$  parties verticales.

## Exemple

Le nœud de trèfle legendrien standard de  $\mathbf{R}^3$  admet au moins cinq familles génératrices non équivalentes (F.).

# Une méthode de démonstration

De tels espaces de modules d'objets brisés interviennent régulièrement dans le calcul de théories homologiques issues des topologies différentielle, symplectique et de contact.

La stratégie pour établir cette correspondance est classique :

- **Étape 1. Compacité** :  $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s) \subset \mathcal{M}^{\text{esc}}(q, p)$ .  
 $\rightsquigarrow$  les éléments de  $\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s)$  s'approchent des éléments de  $\mathcal{M}^{\text{esc}}(q, p)$  quand  $s \rightarrow 0$ .
- **Étape 2. Recollement** :  $\exists \mathcal{M}^{\text{esc}}(q, p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s)$ .  
 $\rightsquigarrow$  quand  $|q| = |p| + 1$ , au voisinage de  $e \in \mathcal{M}^{\text{esc}}(q, p)$ , il existe une unique suite d'éléments de  $\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s)$  qui converge vers  $e$  quand  $s \rightarrow 0$ .

# Un théorème de compacité

Dans le contexte des escaliers, les **trajectoires brisées** de la théorie de Morse sont remplacées par la notion suivante :

## Définition

Une *chaîne d'escaliers* est une concaténation d'un nombre fini d'escaliers consécutifs.

L'équivalent du théorème de **compactification** des espaces de modules en théorie de Morse est alors le suivant :

## Théorème (F.)

Si  $\Lambda$  est **générique** et que les singularités de son front sont toutes de **codimension un**, alors pour tous  $|q| > |p|$ ,  $s_k \rightarrow 0$  et  $\gamma_k \in \mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_{s_k})$ , il existe une chaîne d'escaliers  $\bar{e}$  allant de  $q$  à  $p$  et une sous-suite de  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui « converge » vers  $\bar{e}$ .

## Quelques mots sur la démonstration I

**Difficulté.** Il n'existe pas de borne inférieure uniforme sur la longueur des parties verticales des escaliers.

⇒ les suites d'éléments de  $\mathcal{M}(q, p; \delta_{f_1, f_2}, g_s)$  peuvent dégénérer quand  $s \rightarrow 0$  en des escaliers comportant une **infinité de parties verticales**.

**Observation.** De telles parties verticales doivent s'**accumuler** sur une singularité du front et il existe une infinité de parties horizontales **franchissant le lieu singulier** du front.

**Généricité** ⇒ il ne peut y avoir qu'un nombre fini de parties horizontales proches qui intersectent le lieu singulier du front.

↪ ce qui résout le problème!

## Quelques mots sur la démonstration II

Pour mettre en place le programme précédent, il est nécessaire de savoir **construire des parties verticales et horizontales**.

Parties verticales : théorème d'Ascoli pour  $\gamma_k$ .

## Quelques mots sur la démonstration II

Pour mettre en place le programme précédent, il est nécessaire de savoir **construire des parties verticales et horizontales**.

Parties horizontales : théorème d'Ascoli pour  $\gamma_k(s_k^{-1}\cdot)$ ?

**Problème.** Les estimées  $C^2$  semblent **explorer**!

**Solution.** Près d'une portion sans singularité du front, obtenir une majoration de la distance dans la fibre de  $\gamma_k$  au front, en déduire la convergence souhaitée et utiliser la généricité pour l'étendre à travers les singularités du front.

$\rightsquigarrow$  adapter qu'en théorie de Morse, le découpage en variétés stable et instable permet de montrer que la distance d'une trajectoire de gradient à un point critique est bornée par un **cosinus hyperbolique**.

**Nouveauté.** Gérer le déplacement dans la base des trajectoires.

Que faire après ce théorème de compacité ?

- S'affranchir de la restriction sur les **singularités** du front dans le théorème de compacité.
- Démontrer le **théorème de recollement**.
- Utiliser les escaliers de gradient pour obtenir de nouvelles **applications** des familles génératrices en géométrie de contact.

Je vous remercie de votre attention!