# Homologie pour les familles génératrices et escaliers de gradient

Cyril Falcon

Jeudi 21 novembre 2019, Séminaire Pampers (IRMAR)

LMO (Université Paris-Sud)

## Introduction I : contexte

**Motivation.** Comprendre les déformations (isotopie) des *sous-variétés legendriennes* des *variétés de contact*.

**Question.** Soient $(V, \xi)$ une variété de contact et $\Lambda_0, \Lambda_1$ deux sous-variétés legendriennes de $(V, \xi)$, existe-t-il un chemin lisse $(\Lambda_t)_{t \in [0,1]}$ de sous-variétés legendriennes de $(V, \xi)$ ?

$\rightsquigarrow$ généralisation et raffinement de la théorie des nœuds.

**Approche.** Construction d'invariants par isotopie legendrienne :

$$\mathrm{Inv}(\Lambda_0) \neq \mathrm{Inv}(\Lambda_1) \implies \Lambda_0 \not\sim \Lambda_1,$$

et étude de la réciproque (invariant complet ?).

## Introduction II : homologie pour les familles génératrices

Dans cet exposé :

- $(V, \xi) = \left(\mathbf{R}^{2n+1}, \xi_{\mathrm{std}}\right)$, modèle local des variétés de contact,
- $\Lambda$ est décrite par une famille génératrice $\left(f_x \colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}\right)_{x \in \mathbf{R}^n}$.

$\rightsquigarrow$ Construction de $\delta \colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ dont les points critiques « encodent » de la topologie de contact de $\Lambda$.

**Idée.** Théorie de Morse de $\delta \rightsquigarrow$ modules d'homologie $\mathrm{HFG}_\bullet(\delta)$.
$\rightsquigarrow$ Invariant de $\Lambda$ : $\mathrm{Inv}(\Lambda) = \{\mathrm{HFG}_\bullet(\delta); \delta\}$.

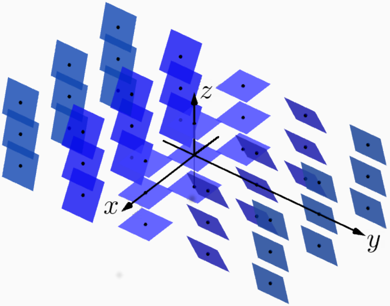
**Objectifs.**

- Développer une méthode de calcul pour $\mathrm{HFG}_\bullet(\delta)$,
- Faire la géographie de $\mathrm{HFG}_\bullet(\delta)$,
- Relier $\mathrm{HFG}_\bullet(\delta)$ à d'autres invariants legendriens.

# Topologie de contact

# La structure de contact standard

Soient $\alpha = \mathrm{d}\, z - \sum_{i=1}^{n} y_i \,\mathrm{d}\, x_i$ sur $\mathbf{R}^n{}_x \times \mathbf{R}^n{}_y \times \mathbf{R}_z$ et $\xi = \ker(\alpha)$, ce sont la *forme* et la *structure de contact standard* sur $\mathbf{R}^{2n+1}$.




**Observation.** Le champ de vecteurs $\partial_z$ engendre $\ker(\mathrm{d}\,\alpha)$ et satisfait $\alpha(\partial_z) = 1$, c'est le champ de Reeb de $\alpha$.

# Les sous-variétés legendriennes I

**Proposition**
*Si $L$ est partout tangente à la distribution de contact $\xi$, c'est-à-dire $TL \subset \xi$, ou encore $\alpha_{|L} \equiv 0$, alors $\dim(L) \leqslant n$.*

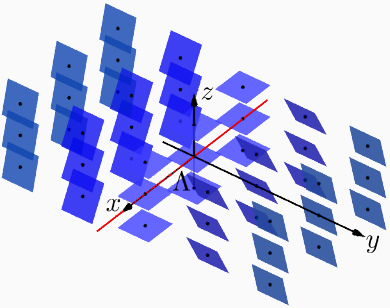
Les distribution de contact $\xi$ minimise, parmi tous les champs d'hyperplans tangents à $\mathbf{R}^{2n+1}$, la dimension des sous-variétés qui lui sont partout tangentes.

**Définition**
Une sous-variété $\Lambda$ de $\mathbf{R}^{2n+1}$ est *legendrienne* si $\Lambda$ est partout tangente à $\xi$ et $\dim(\Lambda) = n$.

Les sous-variétés legendriennes de $\mathbf{R}^{2n+1}$ maximisent la dimension des sous-variétés de $\mathbf{R}^{2n+1}$ partout tangentes à $\xi$.

# Les sous-variétés legendriennes II

Pour tout $n$, $\{y = z = 0\}$ est une sous-variété legendrienne :




Soit désormais $\Lambda$ une sous-variété legendrienne de $\mathbf{R}^{2n+1}$.

**Définition**
Une *corde de Reeb* de $\Lambda$ est une trajectoire non constante du champ de Reeb, à savoir $\partial_z$, qui débute et termine sur $\Lambda$.

# La projection frontale

**Problème.** Comment représenter $\Lambda$ de dimension $n$ en dimension ambiante $2n+1$ (grande codimension) ?

**Solution.** *Projection frontale* : $\mathbf{R}^n{}_x \times \mathbf{R}^n{}_y \times \mathbf{R}_z \to \mathbf{R}^n{}_x \times \mathbf{R}_z$.

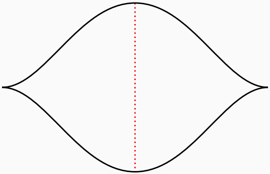
**Proposition**
*Les singularités du front de $\Lambda$ forment génériquement une sous-variété stratifiée de codimension 1, mais l'espace tangent au front est défini partout et n'est jamais vertical, de sorte que*

$$y_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

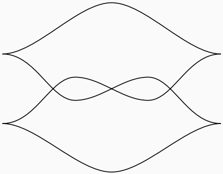
*Réciproquement, une partie de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui satisfait ces propriétés est le front d'une unique sous-variété legendrienne de $\mathbf{R}^{2n+1}$.*

# Des exemples de fronts

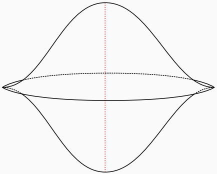
Les sous-variétés legendriennes sont régulières, mais leurs fronts peuvent être singuliers :



Nœud trivial



Nœud de trèfle



Sphère triviale de $\mathbf{R}^5$

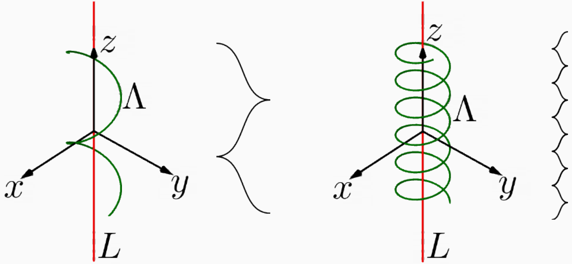
Les cordes de Reeb correspondent aux paires de points verticalement alignés du front en lesquels les espaces tangents au front sont parallèles.

# De la rigidité legendrienne I

Toute sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{2n+1}$ est isotope à une sous-variété legendrienne $\rightsquigarrow$ elles sont abondantes !

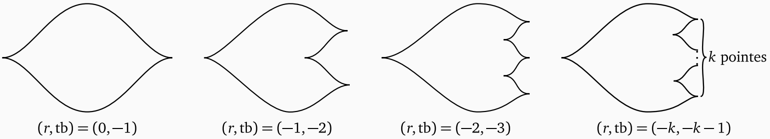
Par contre, ces approximations sont multiples :

**Théorème (folklore)**
*Soit $\Lambda$ une sous-variété legendrienne de $\mathbb{R}^{2n+1}$, la classe d'isotopie lisse de $\Lambda$ se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes.*



# De la rigidité legendrienne II

Invariants classiques : $(r, \mathrm{tb})$ (topologie algébrique) permettent d'établir le théorème quand $n = 3$ :

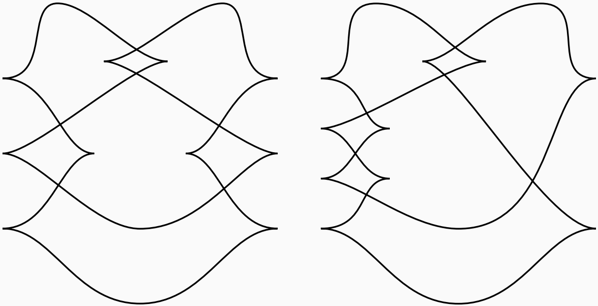



Les sous-variétés legendriennes sont petites ($\mathrm{codim} = n + 1$), mais elles sont encombrantes (difficiles à isotoper).
$\rightsquigarrow$ comportement surprenant et riche !

Rigidité : absence d'obstructions topologiques ne garantit pas l'existence d'une isotopie legendrienne.

# Les limites des invariants classiques I

Théorème (Tchekanov, 2002)
*Les nœuds legendriens de* $\mathbb{R}^3$ *qui sont des miroirs de* $5_2$ *(donc isotopes comme nœuds topologiques) suivants :*



*ont même* $(r, \mathrm{tb})$*, mais ne sont pas legendriennement isotopes.*

# Les limites des invariants classiques II

La situation est encore pire en grande dimension :

**Théorème (Ekholm-Etnyre-Sullivan, 2005)**
*Pour tout $n > 1$, il existe une infinité de sphères legendriennes de $\mathbb{R}^{2n+1}$ qui ont les mêmes invariants classiques, mais ne sont pas isotopes comme sous-variétés legendriennes.*

Les invariants classiques ne sont pas efficaces.

**Objectif**. Construire des invariants legendriens qui encodent plus de topologie de contact que les invariants classiques.

# Familles génératrices

# Les sous-variétés legendriennes graphiques

**Observation.** Si $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une fonction lisse, alors

$$\Lambda = \left\{ \left(x, f'(x), f(x)\right) | x \in \mathbf{R}^n \right\} \subset \mathbf{R}^{2n+1}$$

est une sous-variété legendrienne, son front est le graphe de $f$.

Les sous-variétés legendriennes ainsi décrites sont des *sous-variétés legendriennes graphiques*.

La classe des sous-variétés legendriennes graphiques est trop restreinte pour être intéressante.

Les familles génératrices offrent une extension naturelle de la classe des sous-variétés legendriennes graphiques.

**Définition**

Soit $f\colon \mathbf{R}^n{}_x \times \mathbf{R}^N{}_\eta \to \mathbf{R}$, alors $f$ est une *famille génératrice* si $\mathbf{0}$ est une valeur régulière de $\partial_\eta f\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \to \left(\mathbf{R}^N\right)^*$.

**Observation.** Si $f$ est une famille génératrice, alors

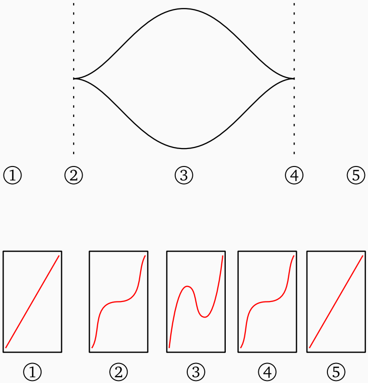
$$\left\{(x, \partial_x f(x,\eta), f(x,\eta)) \,\middle|\, (x,\eta) \in \partial_\eta f^{-1}(\mathbf{0}) = \Sigma_f\right\}$$

est une sous-variété legendrienne immergée de $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Attention ! Une famille génératrice pour $\Lambda$ n'existe pas toujours.

# Deux exemples de familles génératrices

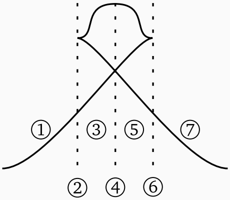
Le front de $\Lambda$ est obtenu en traçant les valeurs critiques de $f_x$ en fonction de $x$, c'est le diagramme de Cerf de $f$.

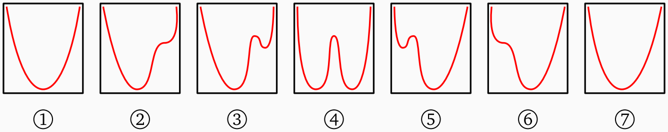



Les pointes du front correspondent aux naissances et morts de points critiques dans la famille $x \mapsto f_x$.

# Deux exemples de familles génératrices

Le front de $\Lambda$ est obtenu en traçant les valeurs critiques de $f_x$ en fonction de $x$, c'est le diagramme de Cerf de $f$.




Les croisements du front correspondent à l'échange de deux valeurs critiques dans la famille $x \mapsto f_x$.

# Equivalence de familles génératrices

Il existe deux opérations naturelles pour modifier une famille génératrice sans changer la sous-variété legendrienne décrite :

- **Difféomorphisme fibré.** Pour $\Phi$ un difféomorphisme fibré de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$ *i.e.* $\Phi\left(x, \mathbf{R}^N\right) = \{x\} \times \mathbf{R}^N$, $x \in \mathbf{R}^n$, soit $f_\Phi = f \circ \Phi$.
- **Stabilisation.** Pour $Q$ une forme quadratique non dégénérée de $\mathbf{R}^k$, soit $f \oplus Q$ définie par

$$(f \oplus Q)(x, \eta, \eta') = f(x, \eta) + Q(\eta'),$$

pour $(x, \eta, \eta') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^k$.

Si deux familles génératrices sont égales à des suites finies de difféomorphismes fibrés et de stabilisations près appliquées à l'une et à l'autre, alors elles sont *équivalentes*.

# Persistance des familles génératrices

Ces opérations sont cruciales dans le résultat suivant :

**Théorème (Tchekanov, 1996)**
*L'existence d'une famille génératrice persiste aux isotopies legendriennes et sa classe d'équivalence est préservée.*

**Principe général.** Chaque invariant des familles génératrices permet de construire un invariant des sous-variétés legendriennes sous-jacentes.

Il suffit de prendre l'union sur toutes les classes d'équivalence de familles génératrices, ce qui reste difficile en pratique.

**Exemple**
Le nombre de classes d'équivalence de familles génératrices est un invariant legendrien.

# La fonction différence

**Définition**
Soient $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ deux familles génératrices de $\Lambda$, alors leur *fonction différence* $\delta \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\delta\left(x, \eta^1, \eta^2\right) = f_1\left(x, \eta^1\right) - f_2\left(x, \eta^2\right).$$

**Observation.** En restriction à $S = \Sigma_{f_1} \times_{\mathbb{R}^n} \Sigma_{f_2}$, $\delta$ mesure la longueur verticale entre deux *branches* du front de $\Lambda$.

**Proposition**
*Les points critiques de valeurs critiques strictement positives de $\delta$ sont en bijection avec les cordes de Reeb de $\Lambda$.*

C'est un appel à la théorie de Morse !

# Interlude : théorie de Morse I

Soient $M$ une variété et $f\colon M \to \mathbf{R}$ une fonction.

**Définition**
La fonction $f$ est dite *de Morse* si pour tout point critique $p$, il existe des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ en $p$ telles que :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - {x_1}^2 - \cdots - {x_k}^2 + {x_{k+1}}^2 + \cdots + {x_n}^2,$$

l'entier $k$ est l'*indice* de $p$ noté $\mathrm{ind}_f(p)$, il s'agit du « nombre de directions issues de $p$ le long desquelles $f$ décroit ».

**Exemples.**

- $M = \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\mathbf{0}$ est un minimum (indice 0),
- $M = \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\mathbf{0}$ est un col (indice 1),
- $M = \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = -x^2 - y^2$, $\mathbf{0}$ est un maximum (indice 2).

# Interlude : théorie de Morse II

Soit $C_\bullet$ l'espace vectoriel engendré sur $\mathbf{Z}/2$ par les points critiques de $f$ et gradué par l'indice de Morse.

Soient $g$ une métrique riemannienne sur $M$ et

$$\mathcal{M}(q,p;g) = \left\{ \gamma \,\middle|\, \dot\gamma = -\nabla^g f \circ \gamma, \lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = q, \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = p \right\},$$

il s'agit génériquement d'une variété, $\dim = \mathrm{ind}_f(q) - \mathrm{ind}_f(p)$ et son quotient par l'action par translations de $\mathbf{R}$ est compactifié par l'ajout de trajectoires brisées.

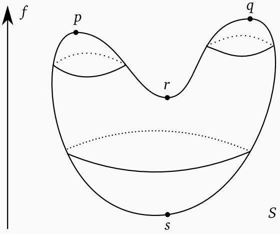
Soit $\partial \colon C_\bullet \to C_{\bullet-1}$ définie par :

$$\partial q = \sum_{p \in C_{|q|-1}} \#_{\mathbf{Z}/2} (\mathcal{M}(q,p)/\mathbf{R})\, p.$$

**Théorème (Smale-Thom-Witten)**
*On a* $\partial^2 = 0$ *et* $H_\bullet(M) = \ker(\partial)/\operatorname{im}(\partial)$ *est un invariant de* $M$.

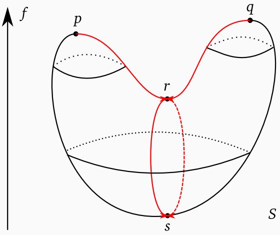
**Exemple**

Soient $S$ la surface définie ci-dessous, $f\colon S \to \mathbf{R}$ la hauteur de $S$ et $g$ la restriction à $S$ de la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^3$.



## Exemple

Soient $S$ la surface définie ci-dessous, $f\colon S \to \mathbf{R}$ la hauteur de $S$ et $g$ la restriction à $S$ de la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^3$.



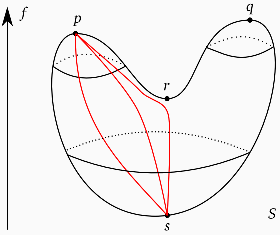

Ici, $C_\bullet = \langle p, q\rangle[2] \oplus \langle r\rangle[1] \oplus \langle s\rangle[0]$ et $\partial$ est donnée par :

$$\partial p = r = \partial q, \partial r = s + s = 0.$$

Finalement, $H_\bullet(S) = (\mathbf{Z}/2)[2] \oplus (\mathbf{Z}/2)[0]$, c'est l'homologie de $S^2$.

# Interlude : théorie de Morse III

**Exemple**
Soient $S$ la surface définie ci-dessous, $f\colon S \to \mathbf{R}$ la hauteur de $S$ et $g$ la restriction à $S$ de la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^3$.




Ici, $C_\bullet = \langle p, q\rangle[2] \oplus \langle r\rangle[1] \oplus \langle s\rangle[0]$ et $\partial$ est donnée par :

$$\partial p = r = \partial q, \partial r = s + s = 0.$$

Finalement, $H_\bullet(S) = (\mathbf{Z}/2)[2] \oplus (\mathbf{Z}/2)[0]$, c'est l'homologie de $S^2$.

# Homologie pour les familles génératrices

L'homologie de $(f_1, f_2)$ est définie comme une homologie de Morse relative de sous-niveaux de $\delta$ :

$$\mathrm{HFG}_\bullet(f_1, f_2) = H_{\bullet+N+1}(\delta < \omega, \delta < \varepsilon; \mathbf{Z}/2),$$

où $\omega > \varepsilon > 0$ sont tels que les valeurs critiques strictement positives de $\delta$ sont contenues dans $[\varepsilon, \omega]$ (Traynor, 2001).

**Observation.** Graduation $\implies$ invariance par stabilisation.
$\rightsquigarrow$ Si $\mathrm{HFG}_\bullet(f_1, f_2) \not\cong \mathrm{HFG}_\bullet(f_3, f_4)$, alors $f_1 \not\sim f_3$ ou $f_2 \not\sim f_4$.

Cet invariant permet de distinguer les nœuds de Tchekanov (Fuchs-Rutherford, 2011).

## Structure et géographie de $\mathrm{HFG}_\bullet(f_1, f_2)$ quand $f_1 \sim f_2$

Le *polynôme de Poincaré* de $(f_1, f_2)$ est défini par :

$$\Gamma_{f_1,f_2}(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \dim \mathrm{HFG}_k(f_1, f_2)t^k \in \mathbf{N}\left[t, t^{-1}\right].$$

Les trajectoires de $-\nabla\delta$ sont difficilement identifiables, mais :

**Théorème (Bourgeois-Sabloff-Traynor, 2015)**
*Si $f_1 \sim f_2$, alors il existe $q(t), p(t) \in \mathbf{N}[t]$ tels que :*

$$\Gamma_{f_1,f_2}(t) = q(t) + p(t) + t^{n-1}p\left(t^{-1}\right), \qquad (\star)$$

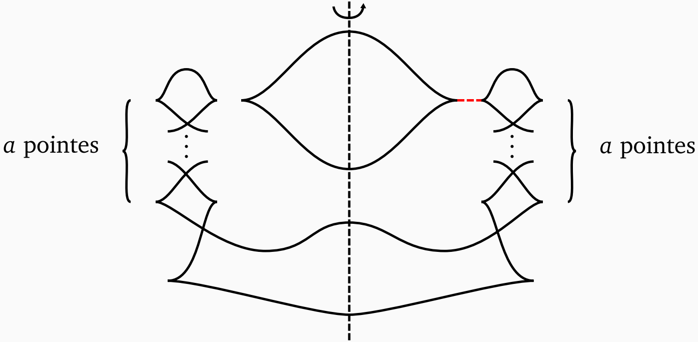
*avec $q$ de degré $n$ qui satisfait $q_k + q_{n-k} = \dim H_k(\Lambda)$.*

*Si $P$ satisfait $(\star)$, alors il existe $f$ telle que $P(t) = \Gamma_{f,f}(t)$.*

Ce résultat facilite le calcul de $\Gamma_{f,f}(t)$.

# Un exemple de calcul I

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et considérons la sphère legendrienne $\Lambda_a$ suivante :

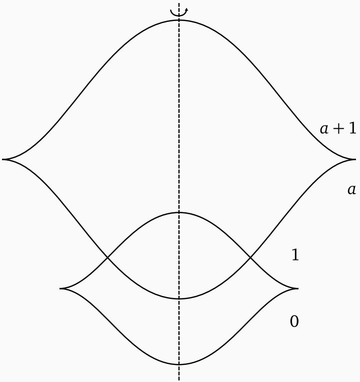



C'est une généralisation topologique du nœud de trèfle.

**Objectif.** Construire une famille génératrice $f_a$ de $\Lambda_a$ et calculer son homologie $\mathrm{HFG}_\bullet(f_a, f_a)$.

# Un exemple de calcul II

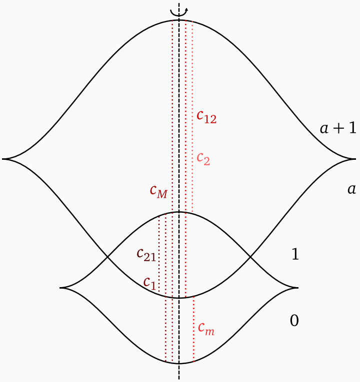
La sphère $\Lambda_a$ est obtenue par isotopie legendrienne et somme connexe sur l'entrelacs de Hopf $H_a$ suivant :




Une famille génératrice $h_a$ de $H_a$ s'obtient en « juxtaposant » des familles génératrices stabilisées de la sphère triviale.

# Un exemple de calcul II

La sphère $\Lambda_a$ est obtenue par isotopie legendrienne et somme connexe sur l'entrelacs de Hopf $H_a$ suivant :




Une famille génératrice $h_a$ de $H_a$ s'obtient en « juxtaposant » des familles génératrices stabilisées de la sphère triviale.

# Un exemple de calcul III

Les points critiques de la fonction différence de $h_a$, listé par valeurs critiques décroissantes, satisfont :

| $p$ | $c_M$ | $c_2$ | $c_{12}$ | $c_1$ | $c_{21}$ | $c_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert p\rvert$ | $n+a$ | $n$ | $n+a-1$ | $n$ | $n-a$ | $a-1$ |

Si $n \geqslant 2$, $a \notin \{1, 2, n\}$ et $a \neq n-a$, alors $c_1, c_2, c_{21}$ et $c_m$ déterminent des classes en homologie et :

$$\Gamma_{h_a,h_a}(t) = 2t^n + t^{a-1} + t^{n-a} + \alpha t^{n+a} + \beta t^{n+a-1}.$$

$\rightsquigarrow$ A-t'on $\partial c_M = c_{12}$ ? Avec $(\star)$ : $\Gamma_{h_a,h_a}(t) = 2t^n + t^{a-1} + t^{n-a}$.

# Un exemple de calcul III

Les points critiques de la fonction différence de $h_a$, listé par valeurs critiques décroissantes, satisfont :

| $p$ | $c_M$ | $c_2$ | $c_{12}$ | $c_1$ | $c_{21}$ | $c_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|p\|$ | $n+a$ | $n$ | $n+a-1$ | $n$ | $n-a$ | $a-1$ |

Si $n \geqslant 2$, $a \notin \{1, 2, n\}$ et $a \neq n-a$, alors $c_1, c_2, c_{21}$ et $c_m$ déterminent des classes en homologie et :

$$\Gamma_{h_a,h_a}(t) = 2t^n + t^{a-1} + t^{n-a} + \alpha t^{n+a} + \beta t^{n+a-1}.$$

$\rightsquigarrow$ A-t'on $\partial c_M = c_{12}$ ? Avec $(\star)$ : $\Gamma_{h_a,h_a}(t) = 2t^n + t^{a-1} + t^{n-a}$.

Or, comme $\Lambda_a$ est obtenue par somme connexe sur $H_a$, il vient :

$$\Gamma_{f_a,f_a}(t) = \Gamma_{h_a,h_a}(t) - t^n,$$

donc $\Gamma_{f_a,f_a}(t) = t^n + t^{a-1} + t^{n-a}$.

# Un invariant complet ?

**Observation.** Toutes les familles génératrices $f$ de $\Lambda_a$ ont la même homologie *simple* $\mathrm{HFG}_\bullet(f, f)$.

**Question.** Sont-elles toutes équivalentes ?

Non ! Certaines sont distinguées par la version *mixte* de HFG.

**Conjecture (Bourgeois)**
*L'homologie* $\mathrm{HFG}_\bullet$ *est un invariant complet pour les classes d'équivalence de familles génératrices.*

**Problème.** Si $f_1 \not\sim f_2$, il n'y a plus de (vraies) contraintes structurales sur $\Gamma_{f_1,f_2}(t)$, comment faire les calculs ?

# Escaliers de gradient

# Les escaliers de gradient I

**Problème.** Les trajectoires de $-\nabla\delta$ ne s'interprètent pas géométriquement avec la sous-variété legendrienne $\Lambda$ puisqu'elles sont à valeurs dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$.

**Idée.** Déformer $g$ pour que les trajectoires de $-\nabla^g\delta$ soient plus géométriques et donc plus facilement identifiables.
$\rightsquigarrow$ écraser les trajectoires de $-\nabla^g\delta$ sur $S = \Sigma_{f_1} \times_M \Sigma_{f_2}$.

**Stratégie.** Pour $s \in ]0,1]$, $g_n$ une métrique riemannienne sur $\mathbf{R}^n$ et $g_N$ une métrique riemannienne sur $\mathbf{R}^N$, introduire

$$g_s = \left(s^{-1}g_n\right) \oplus g_N \oplus g_N,$$

et comprendre le comportement quand $s \to 0$ de $\mathcal{M}(q,p;g_s)$, où $q$ et $p$ sont deux points critiques de $\delta$ avec $|q| = |p| + 1$.

# Les escaliers de gradient II

**Observation.** Soit $m \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ :

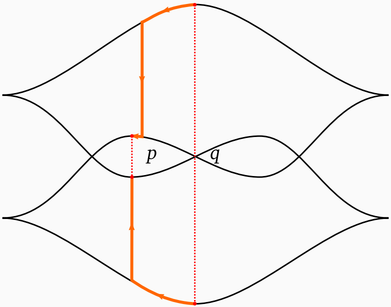
- si $m \notin S$, alors $\lim_{s \to 0} -\nabla^{g_s}\delta(m)$ est dirigé selon $\mathbf{R}^{2N}$,
  $\rightsquigarrow$ Fragment vertical.
- si $m \in S$, alors $\lim_{s \to 0} -s^{-1}\nabla^{g_s}\delta(m)$ est tangent à $S$ en $m$.
  $\rightsquigarrow$ Fragment horizontal.

Un candidat pour décrire le comportement quand $s \to 0$ des trajectoires de $-\nabla^{g_s}\delta$ est donc le suivant :

**Définition (F.)**
Un *escalier de gradient* est une concaténation de trajectoires de gradient consécutives qui alternent entre *fragments horizontaux* et *fragments verticaux*.

# Les escaliers de gradient III

Un exemple d'escalier sur le nœud de trèfle standard de $\mathbb{R}^3$ :




L'ensemble des escaliers de $q$ à $p$ est noté $\mathcal{M}^{\mathrm{esc}}(q, p)$.

**Conjecture (Henry-Rutherford, 2013 et Bourgeois-F.)**
*Si $q$ et $p$ deux points critiques de $\delta$ avec $|q| = |p| + 1$, alors génériquement, il existe un $s_0 > 0$ tel que pour tout $0 < s \leqslant s_0$, il y ait une bijection $\mathcal{M}(q, p; g_s)/\mathbf{R} \cong \mathcal{M}^{\mathrm{esc}}(q, p)$.*

**Conséquence.** $\mathrm{HFG}_\bullet(f_1, f_2)$ se calcule en « comptant » des escaliers de gradient comme suit :

- front $\Longrightarrow$ fragments horizontaux,
- familles génératrices $\Longrightarrow$ fragments verticaux.

**Exemple**
Le nœud de trèfle legendrien standard de $\mathbf{R}^3$ admet au moins 5 familles génératrices non équivalentes (F.).

# Une stratégie de démonstration

La stratégie de démonstration est classique :

- **Étape 1.** Compacité : $\lim_{s \to 0} \mathcal{M}(q,p;g_s) \subset \mathcal{M}^{\mathrm{esc}}(q,p)$.

  Les trajectoires de $-\nabla^{g_s}\delta$ « convergent » vers des escaliers quand $s \to 0$.

  $\rightsquigarrow$ Utilisation du théorème d'Ascoli.

- **Étape 2.** Recollement : $\exists\ \mathcal{M}^{\mathrm{esc}}(q,p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(q,p;g_s)$.

  Tout escalier est obtenu de manière « unique » comme une limite quand $s \to 0$ de trajectoires de $-\nabla^{g_s}\delta$.

  $\rightsquigarrow$ Utilisation de la théorie de Fredholm.

# Un résultat de compacité

Dans le contexte des escaliers, les trajectoires brisées de la théorie de Morse sont remplacées par la notion suivante :

**Définition**
Une *chaîne d'escaliers* est une concaténation d'un nombre fini d'escaliers consécutifs.

L'équivalent du théorème de compactification des espaces de modules en théorie de Morse est alors le suivant :

**Théorème (F., en cours de rédaction)**
*Si les singularités du front de $\Lambda$ sont cuspidales, alors génériquement une trajectoire de $-\nabla^{g_s}\delta$ de $q$ à $p$ « converge », à extraction près, vers une chaîne d'escaliers de $q$ à $p$.*

# Une difficulté technique

**Problème.** La somme des longueurs des fragments verticaux est majoré par $\delta(q) - \delta(p)$, mais il n'existe pas de borne inférieure *a priori* sur leur longueur.

$\rightsquigarrow$ les trajectoires de $-\nabla^{g_s}\delta$ peuvent dégénérer en des escaliers dont les fragments verticaux s'accumulent.

**Observation clé.** Si les fragments verticaux s'accumulent, alors il existe une infinité de fragments horizontaux qui franchissent le lieu singulier du front de $\Lambda$.

$\rightsquigarrow$ C'est un phénomène non générique (adapter Ekholm, 2007).

# Des perspectives de recherche

Que faire après ce théorème de compacité ?

- S’affranchir de la restriction sur les singularités du front dans le théorème de compacité.
  $\rightsquigarrow$ Utilisation d’un raisonnement par connexité.
- Démontrer le théorème de recollement.
  $\rightsquigarrow$ Adapter la démonstration de Bourgeois-Oancea, 2009.
- Utiliser les escaliers de gradient pour obtenir de nouvelles applications des familles génératrices.

Je vous remercie de votre attention !