Isotopie des sous-variétés legendriennes

Cyril Falcon

Lundi 28 octobre 2019, Rencontres doctorales Lebesgue (Nantes)

LMO (Université Paris-Sud)

Objectifs.

- Comprendre les déformations (isotopie) des sous-variétés legendriennes des variétés de contact,
- Exhiber des phénomènes de rigidité topologique de ces déformations.

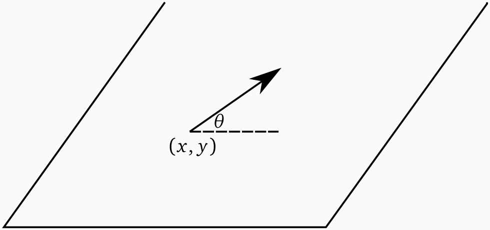
Question. Soient (V, ξ) une variété de contact et Λ_0, Λ_1 deux sous-variétés legendriennes de (V, ξ), existe-t'il un chemin lisse $t \in [0, 1] \mapsto \Lambda_t$ de sous-variétés legendriennes de (V, ξ) ?

Un exemple introductif : le créneau en voiture I

Objectifs.

- Décrire le mouvement d'une voiture qui roule sans glisser sur un parking dont le revêtement est parfaitement plan.
- Savoir quand il est possible de se garer en créneau.

Hypothèse. Le mouvement se fait à vitesse unitaire.



Un exemple introductif : le créneau en voiture II

Modélisation mathématique.

(1) Déterminer l'ensemble des états possibles.
Espace des configurations : $ST\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2{}_{(x,y)} \times S^1{}_\theta$.
Couple position/vitesse normalisée.

(2) Déterminer les degrés de liberté.
Champs de vecteurs sur $ST\mathbb{R}^2$:

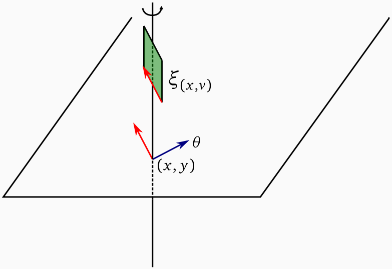
- Tourner les roues : $X_1 = \partial_\theta$,
- Avancer rectilignement : $X_2 = \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y$.

Un exemple introductif : le créneau en voiture III

Bilan. Les contraintes du mouvement sont encodées dans un champ de plans tangents à $ST\mathbf{R}^2$:

$$\xi = \mathrm{Vect}(X_1, X_2) = \ker(\sin(\theta)\,\mathrm{d}\,x - \cos(\theta)\,\mathrm{d}\,y),$$

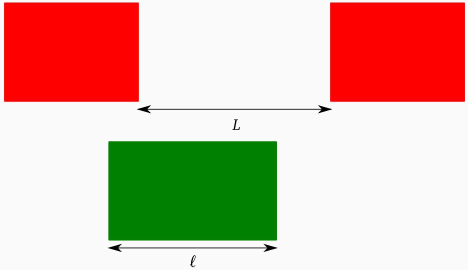
et la vitesse est un élement de ξ.



La variété $(ST\mathbf{R}^2, \xi)$ est de contact et la trajectoire de la voiture en est une courbe legendrienne.

Qu'en est-il du créneau ?

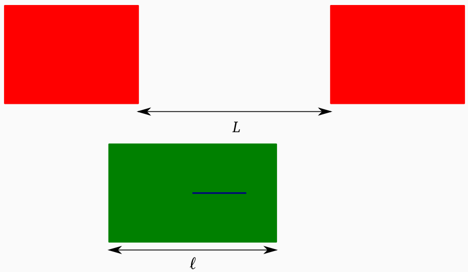
Théorème
Dans la situation suivante :



La voiture verte peut se garer si, et seulement si, $L > \ell$.

Qu'en est-il du créneau ?

Théorème
Dans la situation suivante :

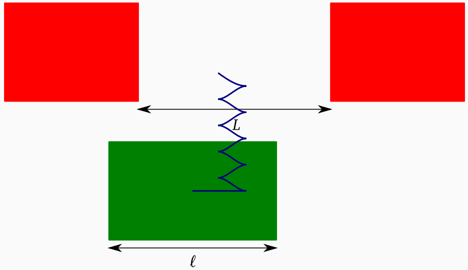


La voiture verte peut se garer si, et seulement si, $L > \ell$.

Un exemple introductif : le créneau en voiture IV

Qu'en est-il du créneau ?

Théorème
Dans la situation suivante :



La voiture verte peut se garer si, et seulement si, $L > \ell$.

Topologie de contact

Les structures de contact

Soit V une variété de dimension impaire $2n+1$.

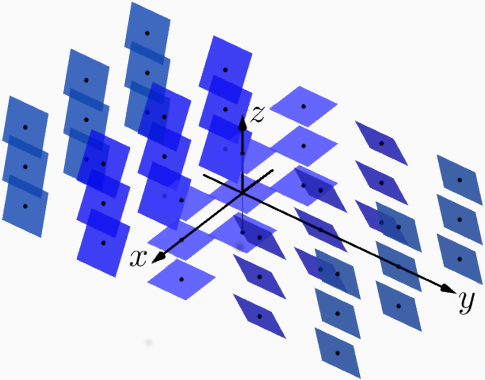
Définition
Une *structure de contact* ξ sur V est un champ d'hyperplans tangents à V tel que pour tout $x \in V$, il existe U un voisinage ouvert de x et $\psi \colon U \to \mathbf{R}^{2n+1}$ un difféomorphisme tels que :

$$T\psi\left(\xi_{|U}\right) = \ker\left(\mathrm{d}\, z - \sum_{k=1}^{n} y_k \,\mathrm{d}\, x_k\right).$$

La paire (V, ξ) est une *variété de contact*.

Exemples de structures de contact I

Exemple.
$V = \mathbb{R}^3$ et $\xi_{\mathrm{std}} = \ker(\mathrm{d}\,z - y\,\mathrm{d}\,x)$.



Exemples de structures de contact II

Exemple.
$V = STM$ pour (M, g) riemannienne et pour $(x, v) \in V$:

$$\xi_{\text{géod}\,(x,v)} = \ker\left(u \in T_{(x,v)}STM \mapsto g_x\left(v, T_{(x,v)}\pi u\right)\right),$$

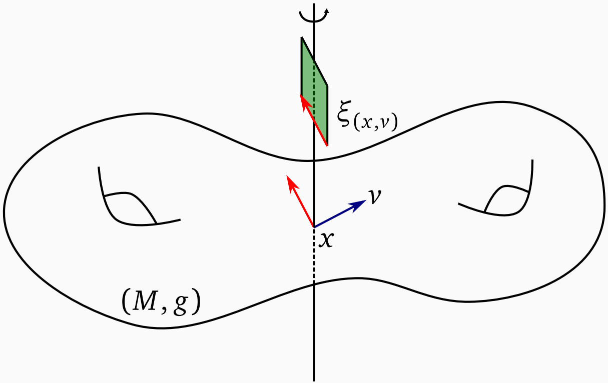
où $\pi\colon V \to M$ est la projection sur la base M.

Pour $(M, g) = (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$, c'est l'exemple introductif.

Remarque.
Si $(x, y, \theta) \in U = \mathbf{R}^2 \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors le difféomorphisme $\psi\colon U \to \mathbf{R}^3$ défini par $\psi(x, y, \theta) = (x, \tan(\theta), y)$ convient.

Exemples de structures de contact III

Pour $(x, v) \in V$, $\xi_{\text{géod}(x,v)}$ se projette sur $v^\perp$ via $T_{(x,v)}\pi$.



Les sous-variétés isotropes

Soient $\left(V^{2n+1}, \xi\right)$ une variété de contact et L une sous-variété.

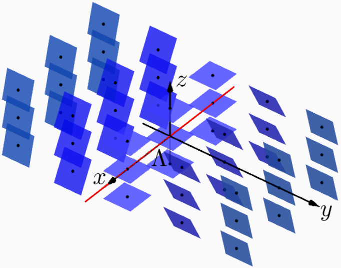
Proposition
Si L est partout tangente à la distribution de contact ξ, c'est-à-dire $TL \subset \xi$, alors $\dim(L) \leqslant n$.

Les structures de contact de V minimisent, parmi tous les champs d'hyperplans tangents à V, la dimension des sous-variétés qui leur sont partout tangentes.

Définition
Une sous-variété Λ de (V, ξ) est *legendrienne* si Λ est partout tangente à ξ et $\dim(\Lambda) = n$.

Les sous-variétés legendriennes de (V, ξ) maximisent la dimension des sous-variétés de V partout tangentes à ξ.

Exemple.
$V = \mathbf{R}^3$, $\xi = \ker(\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x)$ et $\Lambda = \{y = z = 0\}$.

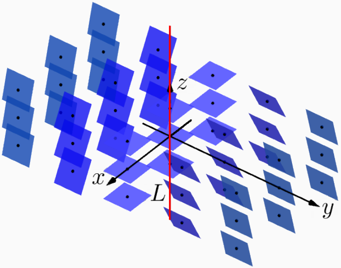


L'approximation legendrienne

Les sous-variétés legendriennes sont abondantes.

Théorème (approximation legendrienne)
Soit L une sous-variété de dimension n de V, alors L est approximable en topologie C^0 par des sous-variétés legendriennes de (V, ξ).

Exemple.
$V = \mathbb{R}^3$, $\xi = \ker(\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x)$, $L = \{z = 0\}$.

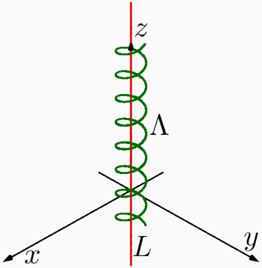


L'approximation legendrienne

Les sous-variétés legendriennes sont abondantes.

Théorème (approximation legendrienne)
Soit L une sous-variété de dimension n de V, alors L est approximable en topologie C^0 par des sous-variétés legendriennes de (V, ξ).

Exemple.
$V = R^3$, $\xi = \ker(\mathrm{d}\, z - y\, \mathrm{d}\, x)$, $L = \{z = 0\}$.



Représenter les sous-variétés legendriennes de $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\mathrm{std}})$

Soit Λ une sous-variété legendrienne de $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi)$.

Problème. Comment représenter Λ de dimension n en dimension ambiante $2n+1$?

Solution. $\pi\colon \mathbb{R}^n{}_x \times \mathbb{R}^n{}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}^n{}_x \times \mathbb{R}_z$, *projection frontale.*

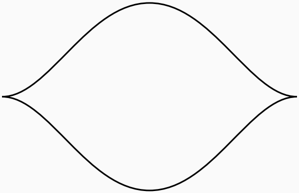
Proposition

Génériquement, la projection frontale de Λ

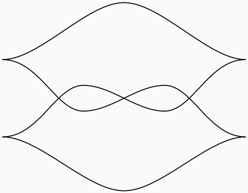
- *est une sous-variété immergée en dehors d'une sous-variété stratifiée de codimension 1 dont les points multiples sont transverses,*
- *détermine Λ via $y_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$.*

Exemples de projections frontales

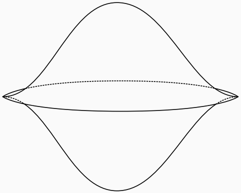
En projetant des singularités apparaissent :



Trivial $(\mathsf{R}^3, \xi_{\mathrm{std}})$



Trèfle $(\mathsf{R}^3, \xi_{\mathrm{std}})$



Trivial $(\mathsf{R}^5, \xi_{\mathrm{std}})$

Structures de contact et physique

Les structures de contact permettent de modéliser de nombreux phénomènes physiques :

- Thermodynamique à l'équilibre (via le premier principe) $\rightsquigarrow$ sous-variétés legendriennes de $(\mathbb{R}^5, \xi_{\mathrm{std}})$,
- Optique géométrique (via le principe de Huygens) $\rightsquigarrow$ flot du champ de Reeb de $(STM, \xi_{\mathrm{géod}})$,
- Mécanique sous contrainte $\rightsquigarrow$ variétés hamiltoniennes
- ...

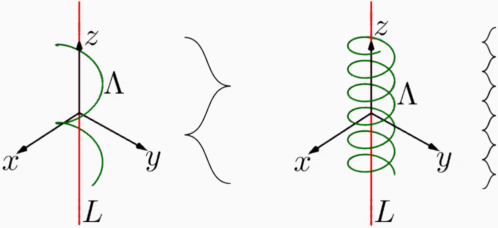
Rigidité legendrienne

Abondance des sous-variétés legendriennes I

Par le théorème d'approximation legendrienne, toute sous-variété lisse de V est isotope à une sous-variété legendrienne de (V, ξ) $\rightsquigarrow$ elles sont abondantes !

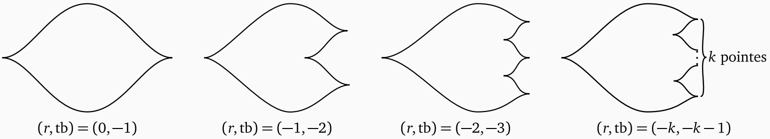
Par contre, ces approximations sont multiples :

Théorème
Soit Λ une sous-variété legendrienne de (V, ξ), la classe d'isotopie lisse de Λ se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes.



Abondance des sous-variétés legendriennes II

Invariants classiques : (r, tb) (topologie algébrique) permettent d'établir le théorème quand $\dim V = 3$:

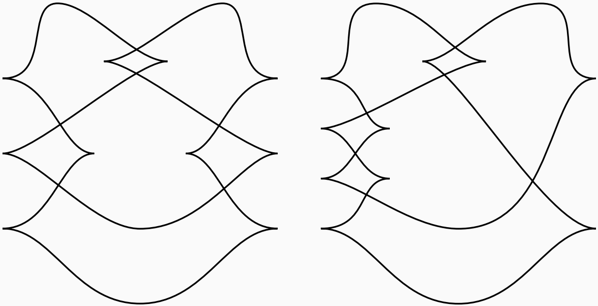


Les sous-variétés legendriennes sont petites ($\mathrm{codim} = n + 1$), mais elles sont encombrantes (difficiles à isotoper).
$\rightsquigarrow$ comportement surprenant et riche !

Rigidité : absence d'obstructions topologiques ne garantit pas l'existence d'une isotopie legendrienne.

Limites des invariants classiques I

Théorème (Tchekanov, 2002)
Les nœuds legendriens de $\left(\mathsf{R}^3, \xi_{\mathrm{std}}\right)$ *qui sont des miroirs de* 5_2 *(donc isotopes comme nœuds topologiques) suivants :*



ont même (r, tb)*, mais ne sont pas legendriennement isotopes.*

Limites des invariants classiques II

La situation est encore pire en grande dimension :

Théorème (Ekholm-Etnyre-Sullivan, 2005)
Pour tout $n > 1$, il existe une infinité de sphères legendriennes de $\left(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\mathrm{std}}\right)$ qui ont mêmes invariants classiques, mais ne sont pas isotopes comme sous-variétés legendriennes.

Les invariants classiques ne sont pas efficaces.

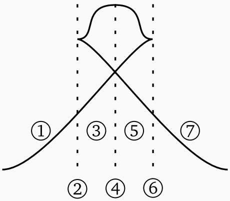
Objectif. Construire des invariants legendriens qui encodent plus de topologie de contact que les invariants classiques.

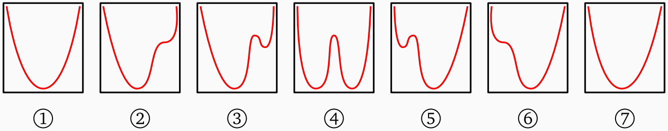
Invariants legendriens

Familles génératrices

Soient Λ une sous-variété legendrienne de $\left(\mathbf{R}^{2n+1}, \xi_{\mathrm{std}}\right)$ et $(f_x \colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R})_{x \in \mathbf{R}^n}$ une famille génératrice de Λ.

Graphe des valeurs critiques de $x \mapsto f_x$ = front de Λ.





Attention ! Une famille génératrice n'existe pas toujours !

Homologie pour les familles génératrices

La fonction différence $\delta_f \colon \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^N \times \mathsf{R}^N \to \mathsf{R}$ de f est :

$$\delta_f\left(x, \eta^1, \eta^2\right) = f\left(x, \eta^1\right) - f\left(x, \eta^2\right),$$

ses points critiques de valeurs critiques strictement positive sont en bijection avec les cordes de Reeb de Λ.

« Compter » trajectoires rigides de $-\nabla\delta_f$ (théorie de Morse) $\rightsquigarrow \Gamma_f(t) \in \mathbb{N}\left[t, t^{-1}\right]$ (Traynor, 2001).

Γ_f est une catégorification de $\mathtt{tb}$: $\Gamma_f(-1) = (-1)^{n(n+1)/2}\,\mathtt{tb}$.

La collection $\left\{\Gamma_f(t); f\right\}$ est un invariant de Λ (Tchekanov, 1996).

Géographie de Γ_f

Les trajectoires de $-\nabla\delta_f$ sont difficilement identifiables, mais :

Théorème (Bourgeois-Sabloff-Traynor, 2015)
Il existe deux polynômes $p, q \in \mathbb{N}[t]$ tels que :

$$\Gamma_f(t) = q(t) + p(t) + t^{n-1}p\left(t^{-1}\right), \tag{$\star$}$$

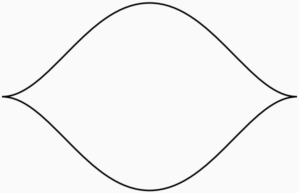
avec q de degré n déterminé par la topologie (homologie) de Λ.
Réciproquement, si P satisfait $(\star)$, il existe f telle que $P = \Gamma_f$.

Ce résultat facilite le calcul de Γ_f, car

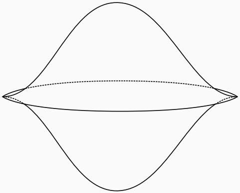
- Graduation des points critiques de δ_f est calculable $\rightsquigarrow$ degré des monomes dans Γ_f est partiellement connu,
- et le théorème restreint les polynômes admissibles.

Exemples de $\Gamma_f(t)$ I

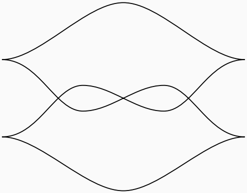
Il existe des familles génératrices telles que



$\Gamma_f(t) = t$



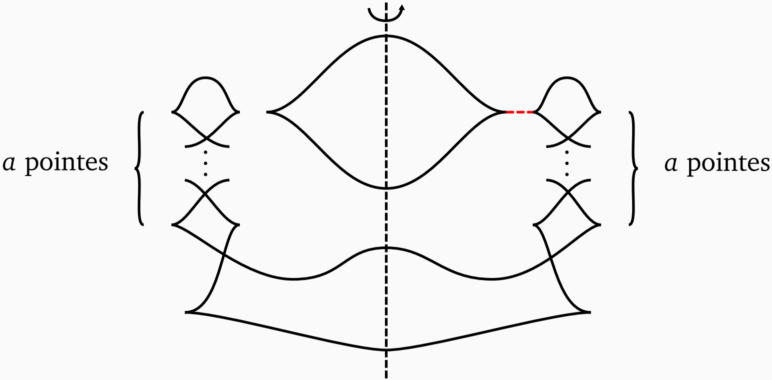
$\Gamma_f(t) = t^n$



$\Gamma_f(t) = t + 2$

Exemples de $\Gamma_f(t)$ II

Il existe une famille génératrice telle que



$$\Gamma_f(t) = t^n + t^a + t^{n-a-1}$$

Une version bilinéarisée de $\Gamma_f(t)$

Objectif. Raffiner $\Gamma_f(t)$ comme invariant legendrien.

La fonction différence $\delta_{f_1,f_2} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ de f_1 et f_2 est :

$$\delta_{f_1,f_2}\left(x,\eta^1,\eta^2\right) = f_1\left(x,\eta^1\right) - f_2\left(x,\eta^2\right),$$

ses points critiques de valeurs critiques strictement positive sont encore en bijection avec les cordes de Reeb de Λ.

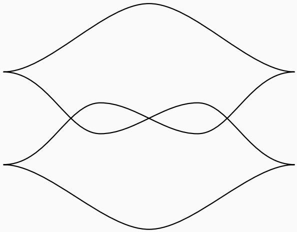
Même construction que précédemment $\rightsquigarrow \Gamma_{f_1,f_2}(t) \in \mathbb{N}\left[t,t^{-1}\right]$.

L'ensemble $\left\{\Gamma_{f_1,f_2}(t); (f_1,f_2)\right\}$ est encore un invariant de Λ.

Il n'y a plus de contraintes structurales sur $\Gamma_{f_1,f_2}(t)$.
$\rightsquigarrow$ Le calcul de $\Gamma_{f_1,f_2}(t)$ est compliqué !

Exemple de $\Gamma_{f_1,f_2}(t)$

Il existe des familles génératrices telles que



$$\Gamma_{f_1,f_2}(t) = 1$$

Ce polynôme ne vérifie plus la condition $(\star)$ du théorème.

Objectifs.

- Développer une méthode de calcul pour $\Gamma_{f_1,f_2}(t)$,
- Faire la géographie de $\Gamma_{f_1,f_2}(t)$,
- Relier $\Gamma_f(t)$ à d'autres invariants legendriens.
  Construire une augmentation ε_f de Λ qui satisfait :

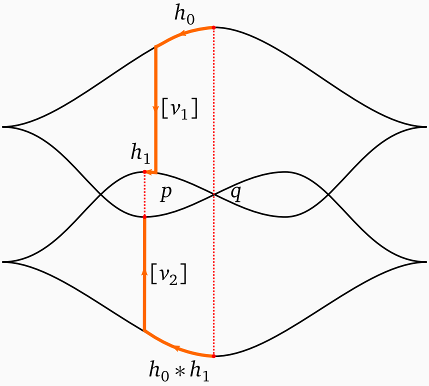
$$\Gamma_f(t) = \widetilde{\Gamma}_{\varepsilon_f}(t).$$

Résolu en dimension 3 (Fuchs-Rutherford, 2011).

Mon sujet de thèse II

Idée (Henry-Rutherford, 2013). Les trajectoires de $-\nabla\delta_{f_1,f_2}$ sont en correspondance bijective avec des escaliers dont les

- fragments horizontaux sont des courbes du front,
- fragments verticaux joignent deux branches du front,



Mon sujet de thèse III

Comment établir cette correspondance bijective ?

Stratégie. Écraser les trajectoires de $-\nabla\delta_{f_1,f_2}$ sur le front de Λ en considérant une dégénérescence explicite $(g_s)_{s\in]0,1]}$ de la métrique riemannienne sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$.

- Étape 1. Théorème de compacité (trajectoire $\mapsto$ escalier),
- Étape 2. Théorème de recollement (escalier $\mapsto$ trajectoire).

Théorème (F., en cours de rédaction)
Si les singularités du front de Λ ne consistent qu'en des bords cuspidaux, la dégénérescence des trajectoires de $-\nabla^{g_s}\delta_{f_1,f_2}$ se fait génériquement vers des chaînes d'escaliers quand $s \to 0$.

Je vous remercie de votre attention !