Invariants des noeuds legendriens

Références.

• J. Etnyre. Legendrian and transversal knots. Dans Handbook of knot theory, p. 105–185. Elsevier, 2005.

• H. Geiges. A brief history of contact geometry and topology. Expositiones Mathematicae, 19(1) : 25–53, 2001.

• H. Geiges. An Introduction to Contact Topology. Cambridge University Press, 2008.

Introduction et motivations

Noeud : plongement $S^1 \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$ (ou S^3) ou son image $K = f(S^1)$

Intuition : bout de ficelle noué dont les extrémités ont été recollées

Ex.

trivial — trèfle 3_1 — huit 4_1

Question. Classification des noeuds.

$f_0, f_1 : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ donnés, $\exists ?\ f_t : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ isotopie.

↳ déformation des noeuds

Rq. Regarder $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 4$ n'est pas intéressant, car tous ces plongements sont isotopes, on peut dénouer (Whitney).

Stratégie. Construction d'invariants algébriques i.e. $K \sim K' \Rightarrow \mathrm{inv}(K) = \mathrm{inv}(K')$ ($\Leftarrow$: invariant complet)

Ex. • nombre de croisements, min #croisements dans le diagramme

trivial : 0, trèfle : 3, huit : 4

• groupe de noeud, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$

trivial : $\mathbb{Z}$, trèfle : $\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$, huit : $\langle x, y \mid yxy^{-1}xy = xyx^{-1}yx \rangle$

Thm de Seifert-Van Kampen $\rightsquigarrow$ algorithme de calcul, présentation de Wirtinger

Problème : difficile de savoir si deux groupes donnés par une présentation sont isomorphes

• polynômes de noeuds : Alexander, Jones, ...

• homologie de Heegaard-Floer

$\Longrightarrow$ Les exemples donnés sont 2 à 2 non isotopes.

Motivation. Toute 3-variété est obtenue par chirurgie de Dehn sur S^3.

↳ $K \subset S^3 \underset{\text{retirer un noeud}}{\rightsquigarrow} S^3 \setminus K \underset{\text{recoller un tore plein}}{\rightsquigarrow} (S^3 \setminus K) \cup_\varphi (\mathbb{D}^2 \times S^1)$, on a : $\partial(S^3 \setminus K) = \mathbb{T}^2 = \partial(\mathbb{D}^2 \times S^1)$.

Comprendre les noeuds $\Rightarrow$ comprendre les 3-variétés.

Démarche. Rajouter de la structure à $\mathbb{R}^3$ (structure de contact)

Etudier des noeuds compatibles à cette structure (noeuds legendriens)

Exploiter la nouvelle structure pour construire de nouveaux invariants.

1. Géométrie de contact

1.1. Un exemple introductif : la conduite d'une voiture

Situation physique : Voiture qui roule sans glisser sur un revêtement plat infini.

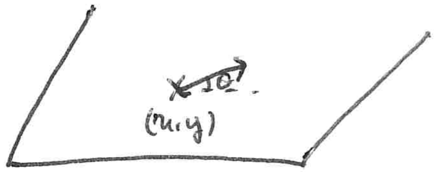
Objectif : décrire son mouvement

Modélisation : état de la voiture = position + direction (vecteur tangent unitaire)

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \theta \in S^1$

(vitesse constante)

↳ système conservatif



Espace des phases : $ST\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ ($\mathbb{R}^2$ est parallélisable)

Degrés de liberté : tourner les roues : ∂_θ

se déplacer dans la direction des roues : $\cos\theta\,\partial_x + \sin\theta\,\partial_y$

⇝ champ de plans (contraintes) : $\xi = \mathrm{Vect}(\partial_\theta, \cos\theta\,\partial_x + \sin\theta\,\partial_y)$

$= \ker(\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx)$

↳ ξ et $\ker(\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx)$ même rang

et $(\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx)(\partial\theta) = 0$

$(\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx)(\cos\theta\,\partial_x + \sin\theta\,\partial_y) = \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$

donc $\partial_\theta, \cos\theta\,\partial_x + \sin\theta\,\partial_y \in \ker(\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx)$.

Conclusion : Trajectoire de la voiture est partout tangente à ξ.

Cas particulier : Restreindre les directions possibles : $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{array}{ccc} (x,y,\theta) & \mathbb{R}^2 \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset ST\mathbb{R}^2 & \\ \varphi \downarrow & \downarrow & \text{est un difféomorphisme.} \\ (x, \tan\theta, y) & \mathbb{R}^3 & \end{array}$$

$\varphi_* \xi = T\varphi(\xi) = \ker(dz - y\,dx)$, car $\ker(\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx) = \ker(dy - \tan\theta\, dx)$

$= \xi_{std}$ $\qquad$ ↑ diviser par $\cos\theta \neq 0$.

Dictionnaire : contraintes ↔ ξ structure de contact

trajectoire ↔ courbe legendrienne.

Exemple de géométrie de contact en théorie du contrôle et système conservatif en mécanique.

1.2. Structures de contact

M variété de dimension 3.

Déf. $\alpha \in \Omega^1 M$ contact si $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$.

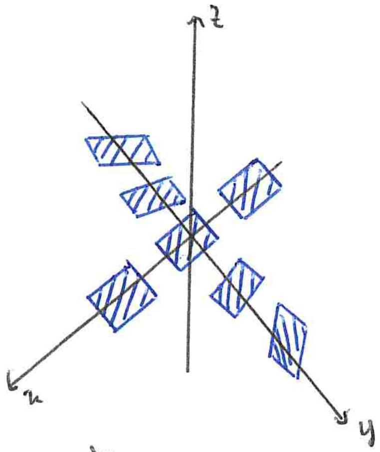
Ex. $M = \mathbb{R}^3$, $\alpha = dz - y\,dx$

$M = \mathbb{R}^2 \times S^1$, $\alpha = \cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx$

$M = S^3 \subset \mathbb{R}^4$, $\alpha = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2$

Déf. $\xi \subset TM$ champ de plans, ξ structure de contact si $\xi = \ker \alpha$, α contact.

Ex.



$\xi_{std}(0)$: horizontal

ξ_{std} est invariant par ∂_x et ∂_z

ξ_{std} tourne le long de l'axe y.

$\xi_{std} = \ker(dz - y\,dx)$

Déf. (M, ξ) variété de contact si ξ structure de contact.

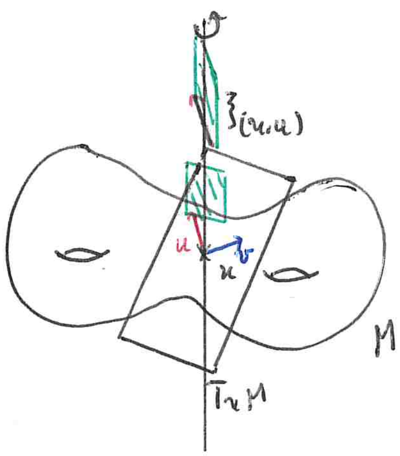
Ex. (X^2, g) riemannienne, $\forall x \in X$, g_x produit scalaire sur $T_x X$.

$STM = \{(x, v),\ x \in X,\ v \in T_x X,\ g_x(v,v) = 1\}$ fibré tangent unitaire dimension 3

$\pi : STX \to X$, $(x,v) \mapsto x$, $T\pi : TSTX \to TX$

$\forall (x,v) \in STX$ $\xi_{(x,v)} = \ker(u \in T_x X \mapsto g_x(v, T_x u))$, $\alpha_{(x,v)}(u) = g_x(v, T_x u)$ contact

$\xi_{(x,v)}$ se projete sur l'orthogonal de v via π.



Pour $X = \mathbb{R}^2$, on retrouve la structure de contact de l'exemple introductif.

Pour $X = \mathbb{T}^2$, on construit une structure de contact sur $\mathbb{T}^3$.

Rq. Thm (Frobenius) ξ intégrable i.e. $\forall x \in M$, $\exists x \in U \subset M$ ouvert, S surface de M tq $\forall y \in U$, $T_y S = \xi_y$ $\iff$ $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Conséquence : Il n'existe pas de surface partout tangente à une structure de contact.

Thm (Darboux)

(M, ξ) contact, $(M, \xi) \overset{\varphi}{\cong} (\mathbb{R}^3, \ker(dz - y\,dx))$ i.e. $T\varphi(\xi) = \ker(dz - y\,dx)$. Si $\xi = \ker \alpha$, on peut demander $\varphi^*(dz - y\,dx) = \alpha$.

Rq. Unique modèle local pour les variétés de contact et les formes de contact

2. Noeuds legendriens

$(M, \xi) = (\mathbb{R}^3, \xi_{std} = \ker(dz - y\,dx))$

2.1. Approximation legendrienne

Déf. L variété de dimension 1, $j : L \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ plongement.
j est legendrien si $T_j(L) \subset \xi_{std}$ i.e. $j^*(dz - y\,dx) = 0$.
$\Lambda = j(L)$ est une courbe legendrienne.
Si $L \cong S^1$, Λ est un noeud legendrien.

Rq. $T\Lambda \subset \xi_{std}$, Λ est partout tangente à ξ_{std} et est de dimension maximale pour cette propriété.

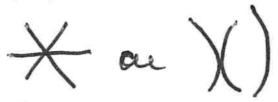
Λ courbe legendrienne de $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$.

Déf. Projection frontale : $\pi_{xz} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,z) \end{array}$, $\pi_{xz}(\Lambda)$: front de Λ.

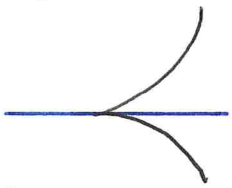
Projection lagrangienne : $\pi_{xy} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$, $\pi_{xy}(\Lambda)$: diagramme lagrangien de Λ.

Ces projections permettent d'étudier les courbes legendriennes de $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$:

Prop. Génériquement :

(1) (a) $\pi_{xz} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion en dehors d'un nombre fini de points n'ayant que des points doubles transverses (X, pas : )

Les points où $\pi_{xz} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas une immersion sont semi-cubiques :



$y^2 = x^3$ [tangente bien définie]

(b) Le front de Λ détermine uniquement Λ via $y = \frac{dz}{dx}$.
$\Rightarrow$ Le front de Λ n'a pas de tangente verticale.

(2) (a) $\pi_{xy} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion n'ayant que des points doubles transverses.

(b) Le diagramme lagrangien de Λ détermine uniquement Λ à translation le long de l'axe z via :

$$z = z(0) + \int_0^1 \dot{x} y$$

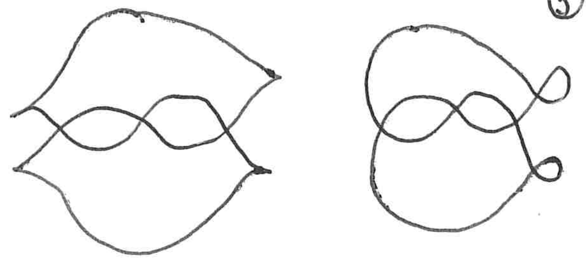
Rq. Génériquement, $\pi_{xy}(\Lambda)$ est une lagrangienne immergée n'ayant que des points doubles transverses de $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$.

Si Λ est un noeud, alors $\pi_{xy}(\Lambda)$ borde un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ d'aire nulle, car $z(0) = z(1) \Rightarrow \int_0^1 \dot{x} y = 0$.
Or, par Green-Riemann, on a : $\int_0^1 \dot{x} y = -\iint_D dx\,dy$.
Rappel : $\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

Ex.

front   diagramme lagrangien

noeud trivial



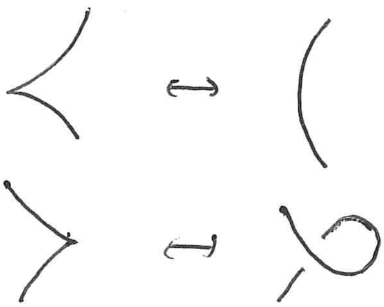
front   diagramme lagrangien

noeud de trèfle

En projection frontale, quand $\frac{dz}{dx} > 0$, Λ revient vers nous.

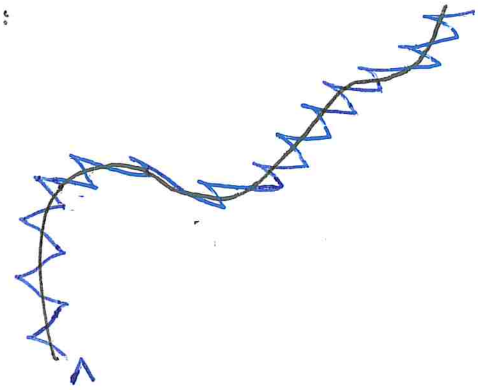
quand $\frac{dz}{dx} < 0$, Λ s'éloigne de nous.

Rq. Passer des projections frontales aux projections lagrangiennes et inversement :



Thm. (approximation legendrienne)
$L \subset \mathbb{R}^3$ de dimension 1.
L est C^0-approximée par des courbes legendriennes de $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$.

Dém. En projection frontale :

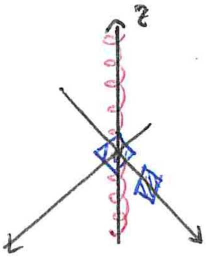


[faire les zigzags avec des pentes données par y]

∎

Rq. Il y a beaucoup de courbes legendriennes.
Tout noeud topologique admet au moins un représentant legendrien !

Ex.

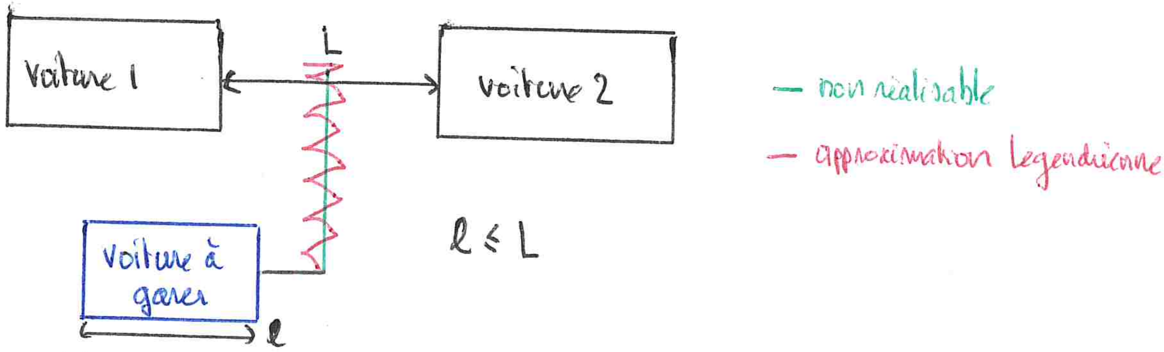


C^0-approximation de $\{z=0\}$ par une courbe legendrienne de $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$.

$\xi_{std}(0)$ est horizontal, mais ξ_{std} tourne le long de l'axe y, donc en s'écartant de 0, on peut monter en restant tangent à ξ_{std}.

Rq. Ce résultat permet de retrouver la non-intégrabilité de ξ_{std}.
Il n'existe pas de surface dont les chemins permettent de relier tous les points de $\mathbb{R}^3$.

Cor. Il est toujours possible de se garer en créneau entre deux voitures si la place disponible est plus grande que celle de la voiture à garer.



Dém. L'approximation legendrienne est locale et localement $(M,\xi) \underset{\text{Darboux}}{\cong} (\mathbb{R}^3, \ker(dz - y\,dx))$, donc elle est valable dans toute variété de contact.
On l'applique à $(ST\mathbb{R}^2, \ker(\sin\theta\,dy - \cos\theta\,dx))$ qui modélise la conduite d'une voiture. ∎

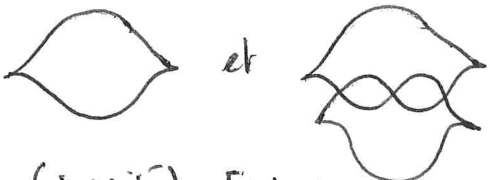
2.2. Isotopie legendrienne

On travaille avec des noeuds legendriens.

Déf. $(j_t : S^1 \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_{std}))_{t\in[0,1]}$ famille de plongements.
$(j_t)_t$ est une isotopie legendrienne si $\forall t$, $T_{j_t}(S^1) \subset \xi_{std}$ i.e. $j_t^*(dz - y\,dx) = 0$.
↳ déformation de noeuds legendriens.

Question. Λ_0, Λ_1 noeuds legendriens, Λ_0 et Λ_1 sont-ils legendriennement isotopes ?
↳ Raffinement de la théorie des noeuds topologiques : seules les déformations restant en tout temps partout tangente à ξ_{std} sont autorisées.

Ex.



sont non legendriennement isotopes, car non isotopes.

Question (rigidité). Existe-t-il des noeuds legendriens isotopes mais pas legendriennement isotopes ?
↳ phénomènes non topologiques en topologie de contact.

Rq. On peut raffiner la question en remplaçant "isotopes" par "formellement legendriennement isotopes", ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'obstructions homotopiques (topologie algébrique) à l'existence d'une isotopie legendrienne.
↳ Recherches actuelles en topologie de contact : déterminer la frontière entre flexibilité/rigidité.

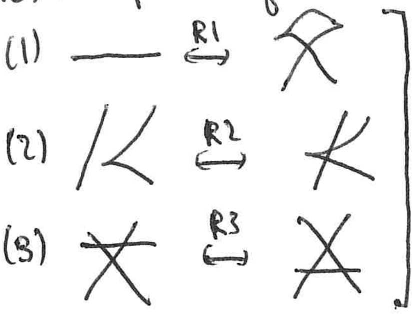
Ex.

sont des noeuds topologiques triviaux, sont-ils legendriennement isotopes ?

Thm. (Świątkowski, 1992)

Deux noeuds legendriens sont legendriennement isotopes si, et seulement, si leurs projections frontales sont reliées par un nombre fini de mouvements suivants :

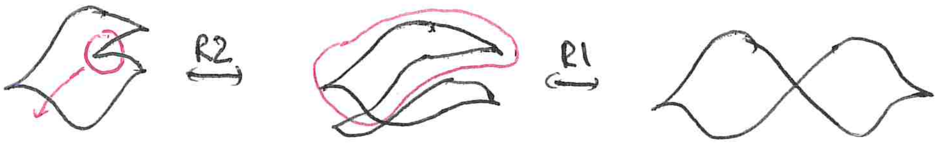
(0) isotopie des fronts

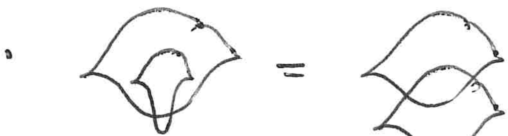


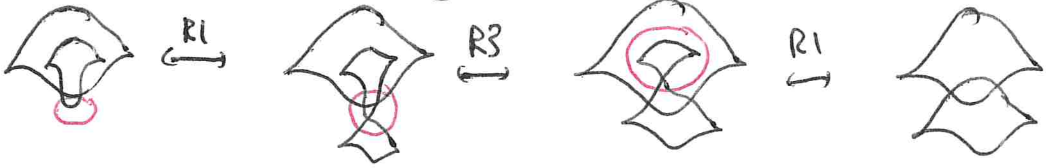
mouvements de Reidemeister

Rq. Il y a un analogue pour les noeuds topologiques.

Ex.



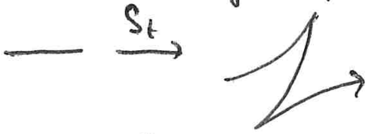




Opérations qui ne changent pas la classe topologique d'un noeud legendrien :

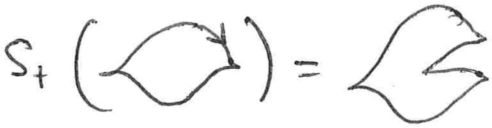
Déf. On remplace un segment lisse du front par un zigzag :

Stabilisation positive :



Stabilisation négative :

Ex.



Les stabilisations apportent de la flexibilité aux noeuds legendriens :

Thm. (Fuchs, Tabachnikov, 1997)

Deux noeuds legendriens isotopes deviennent legendriennement isotopes après un nombre fini de stabilisations.

Rq. Les stabilisations ne sont pas des opérations anodines du point de vue de la topologie de contact. Tous les invariants legendriens de nature contact d'un noeud legendrien stabilisé sont nuls.

3. Invariants classiques

Étude de la rigidité des noeuds legendriens.

3.1. Nombre de rotation

Λ noeud legendrien orienté générique.

Déf. Le nombre de rotation $r(\Lambda)$ de Λ est défini en projection frontale par :

$$r(\Lambda) = \frac{1}{2}\left(\# \prec \; - \# \curlyeqprec\right) \in \mathbb{Z}$$

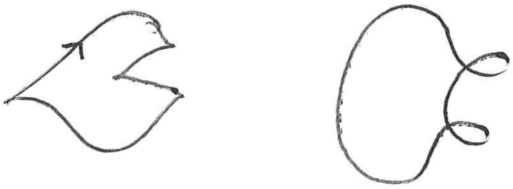
Prop. $r(\Lambda) = \operatorname{ind}(\Pi_{xy}(\Lambda)) = \deg\left(\frac{\Pi_{xy}'}{\|\Pi_{xy}'\|}\right)$.

Dém. Passage de la projection frontale à la projection lagrangienne. ∎

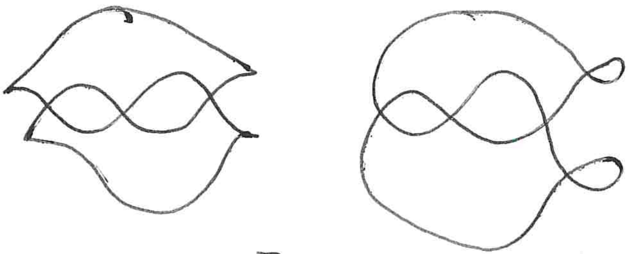
Rq. $r(\Lambda)$ compte le nombre de tour orienté des tangentes au diagramme lagrangien de Λ.
↳ $\Pi_{xy} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion, bien défini.

Ex.

$r = 0$



$r = -1$



$r = 0$

Prop. r est invariant par isotopie legendrienne.

Dém. D'après le théorème de Świątkowski, il suffit de vérifier que les mouvements de Reidemeister ne changent pas la valeur de r (compter les nouvelles contributions après les mouvements).

R1 :  : $\frac{1}{2}(\# \prec - \# \curlyeqprec) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$ (création de deux cusps)

R2 : pas de création / disparition de cusps.

R3 : pas de création / disparition de cusps. ∎

Prop. $r(S_\pm(\Lambda)) = r(\Lambda) \mp 1$.

Dém.  : $\frac{1}{2}(\# \prec - \# \curlyeqprec) = \frac{1}{2}(0-2) = -1$.

 : $\frac{1}{2}(\# \prec - \# \curlyeqprec) = \frac{1}{2}(2-1) = 1$. ∎

3.2. Nombre de Thurston-Bennequin

Λ noeud legendrien orienté générique.

Déf. Le nombre de Thurston-Bennequin $tb(\Lambda)$ de Λ est défini en projection frontale par :

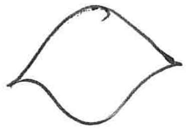
$$tb(\Lambda) = \# \times_{\searrow} - \# \times^{\nearrow} - \frac{1}{2}\left(\# \prec^{\nearrow} + \succ_{\searrow}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Rq. Dans une projection frontale les croisements $\times$ n'arrivent jamais, car $y = \frac{dz}{dx}$ implique que le brin du dessus à la plus grande pente.

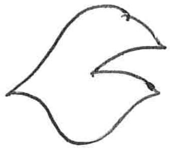
Prop. $tb(\Lambda) = enl(\Lambda, \Lambda')$, où Λ' est obtenu en décalant légèrement Λ dans la direction $z>0$,

$= \# \times_{\searrow} - \# \times^{\nearrow}$, on compte uniquement les croisements mixtes (Λ avec Λ') et pas les croisements de Λ avec Λ et Λ' avec Λ'.

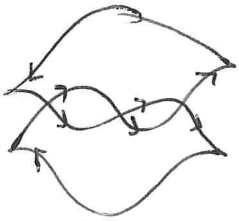
Ex.



$tb = -1$



$tb = -2$



$tb = 1$

$$\# \times_{\searrow} - \# \times^{\nearrow} - \frac{1}{2}\left(\# \prec + \prec_{\searrow}\right) = 3 - 0 - \frac{1}{2}(2+2) = 1.$$

Prop. tb est invariant par isotopie legendrienne.

Dém. D'après le théorème de Świątkowski, il suffit de vérifier que les mouvements de Reidemeister ne changent pas la valeur de tb (compter les nouvelles contributions après les mouvements).

R1 :  : $\# \times_{\searrow} - \# \times^{\nearrow} - \frac{1}{2}\left(\# \prec + \succ\right) = 1 - 0 - \frac{1}{2}(1+1) = 0$ (création de deux cusps et d'un croisement)

R2 :  : $\# \times_{\searrow} - \# \times^{\nearrow} - \frac{1}{2}\left(\# \prec + \succ\right) = 1 - 1 - \frac{1}{2}(0+0) = 0$ (pas de création / disparition de cusps + création de deux croisements)

Les autres orientations $\prec$, $\prec$, $\prec$ sont analogues ; les croisements sont opposés.

R3 : pas de création / disparition de cusps et croisements.

∎

Prop. $tb(S_{\pm}(\Lambda)) = tb(\Lambda) - 1$.

Dém.

 : $\# \times^{\nearrow} - \# \times_{\searrow} - \frac{1}{2}\left(\# \prec + \# \prec_{\searrow}\right) = 0 - 0 - \frac{1}{2}(0+2) = -1.$

 : $\# \times^{\nearrow} - \# \times_{\searrow} - \frac{1}{2}\left(\# \prec + \# \prec_{\searrow}\right) = 0 - 0 - \frac{1}{2}(2+0) = -1$

∎

3.3. Rigidité et classification

Thm. Toute classe d'isotopie d'un noeud legendrien se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne.

Dém. Stabilisation : préserve la classe d'isotopie lisse + r, tb invariants par isotopie legendrienne.
change la valeur de r et tb ∎

Ex.

$(r,tb)=(0,-1)$ $\quad(r,tb)=(-1,-2)\quad$ $(r,tb)=(-2,-3)$ $\quad\ldots\quad$ $(r,tb)=(-n,-n-1)$

noeuds topologiques triviaux non legendriennement isotopes.

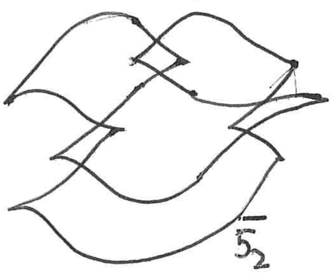
Rq. Réponse aux questions : Oui, il y a de la rigidité legendrienne ! (phénomènes non topologiques)
La topologie classique échoue à classer les noeuds legendriens.

Question. Pour quels noeuds topologiques, les classes d'isotopie legendrienne sont distingués par (r,tb) ?

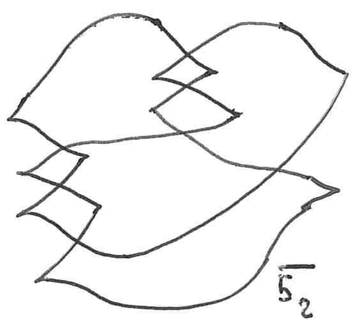
Thm. (Eliashberg, Fraser, 2009)
Deux noeuds legendriens topologiquement triviaux sont legendriennement isotopes si, et seulement, s'ils ont même r et tb.

Thm. (Etnyre, Honda, 2001)
Deux noeuds legendriens toriques (pouvant être dessiné sur un tore, comme le trèfle)/en huit sont legendriennement isotopes si, et seulement, s'ils ont même r et tb.

Thm (Chekanov, 2002)



et



sont isotopes, ont mêmes r et tb

mais ne sont pas legendriennement isotopes.

Rq. Pour distinguer ces noeuds legendriens, Y. Chekanov utilise ce qui sera une version combinatoire de l'homologie de contact legendrienne en dimension 3.
↳ Son article contient déjà la notion d'augmentation et d'homologie linéarisée.

Conclusion et ouverture

Limitation de (r, tb) pour l'étude de la rigidité legendrienne :

- (r, tb) ne suffisent pas à distinguer les différents représentants d'un noeud topologique donné.
- (r, tb) sont des invariants provenant de la topologie algébrique, ils n'exploitent pas vraiment la structure de contact ambiante.

Solutions :

(1) homologies pour les familles génératrices : théorie de Morse-Bott-Cerf (Sabloff, Traynor)

(2) homologie de contact legendrienne : courbes pseudo-holomorphes (Gromov) (Etnyre, Ekholm, Sullivan)

Comparaison :

(1) : facile à définir (peu de bagage technique)
difficile à calculer (pas de méthode)

(2) : difficile à définir (beaucoup de bagage technique)
calculable par la théorie des Morse flow trees (Ekholm)

(1) et (2) sont étroitement liés (Fuchs, Rutherford).

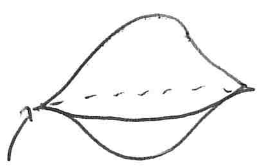
Objectifs de ma thèse :
- méthode de calcul pour (1)
  escaliers de gradient $\leftrightarrow$ Morse flow trees
- rapprocher (1) et (2)

Généralisation des concepts en dimension $2n+1$:

$$3 \qquad\qquad 2n+1$$

$$\alpha \wedge d\alpha \longrightarrow \alpha \wedge (d\alpha)^n$$

$$\Lambda,\ T\Lambda \subset \xi,\ \dim \Lambda = 1 \longrightarrow \Lambda,\ T\Lambda \subset \xi,\ \dim\Lambda = n$$ (sous-variété legendrienne)



front d'une sphère legendrienne en dimension 5

équateur de cusps

noeud legendrien stabilisé $\longrightarrow$ sous-variété legendrienne lâche

Structures de contact sur : J^1M, STM, PT^*M, S^{2n+1}, ...

Tous les énoncés se généralisent à la dimension supérieure.

En dimension 3, on a des techniques spécifiques (combinatoires) qui nous facilitent la tâche.

Mes travaux devraient indifféremment traiter toutes les dimensions.

Cet exposé n'a fait qu'effleurer une infime partie de l'immense diversité des questions en topologie de contact