

exail



# **QUAND LES MATHÉMATIQUES TRACENT LA ROUTE**

Cyril Falcon (Exail R&D Navigation)  
[cyril.falcon@exail.com](mailto:cyril.falcon@exail.com)

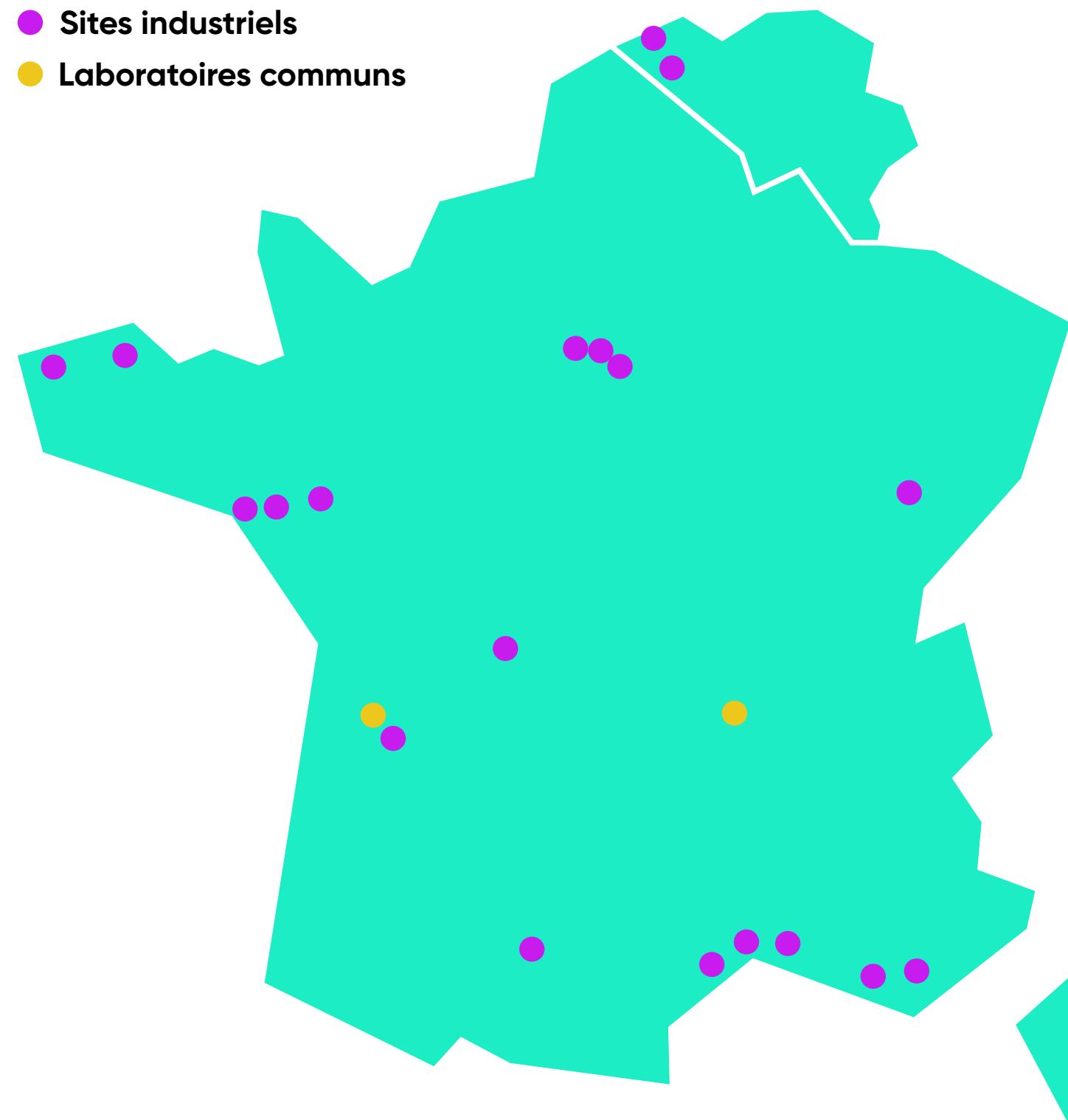
# Sommaire

- 1. Une présentation d'Exail**
- 2. La navigation inertielle**
- 3. Un filtre de Kalman profond**

# UNE PRÉSENTATION D'EXAIL

Un acteur industriel majeur des hautes technologies

# Notre entreprise en quelques chiffres



- **2000+ collaborateurs présents sur 4 continents.**
  - Des équipes commerciales et support dans 14 pays.
  - 22 sites industriels en France et Belgique.
  - 2 laboratoires communs en France.
- **370+ millions d'euros de chiffre d'affaire en 2024.**
- **20% des revenus investis en R&D.**

# Nos principaux domaines d'activité

Concevoir des technologies de pointe pour repousser les frontières, des abysses marins aux confins de l'univers.

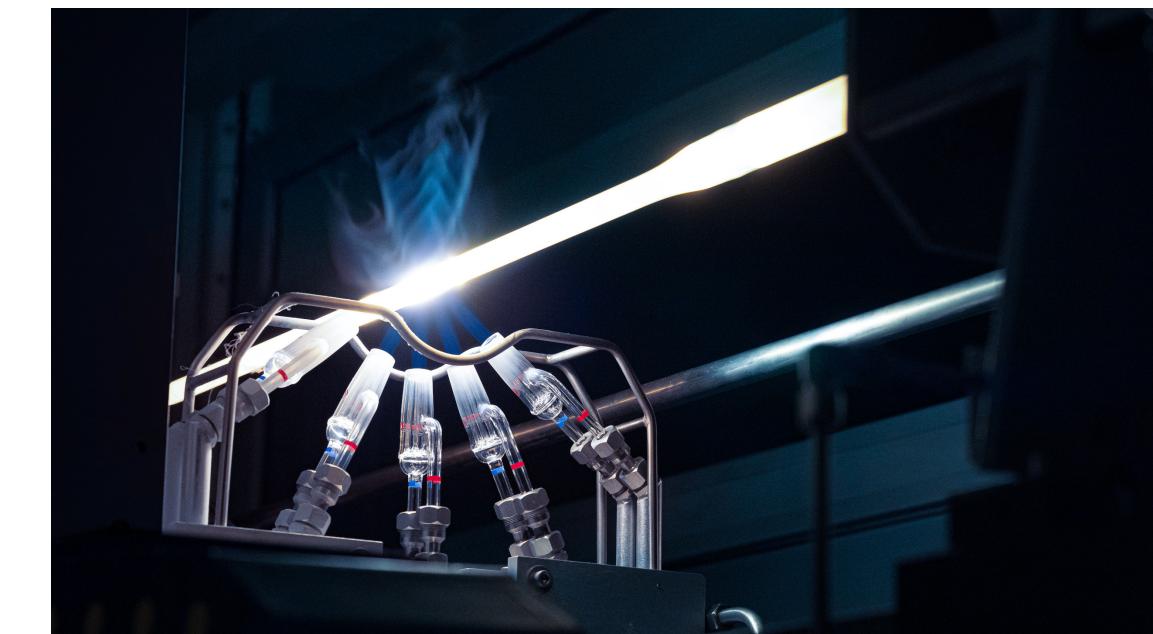
## Robotique



## Navigation



## Photonique



# Des composants aux systèmes complexes

Une intégration verticale pour une maîtrise complète de la chaîne de production.

## Composants



## Équipements

Navigation inertielle

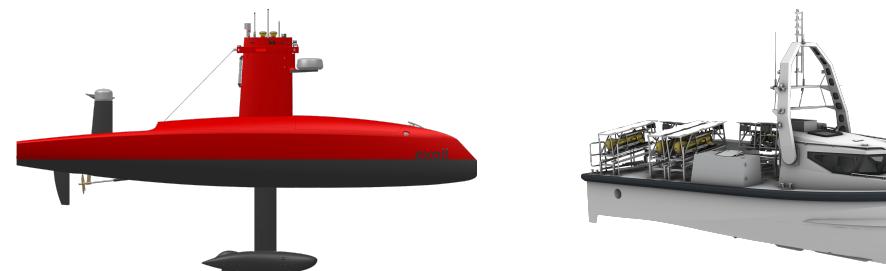


Positionnement acoustique

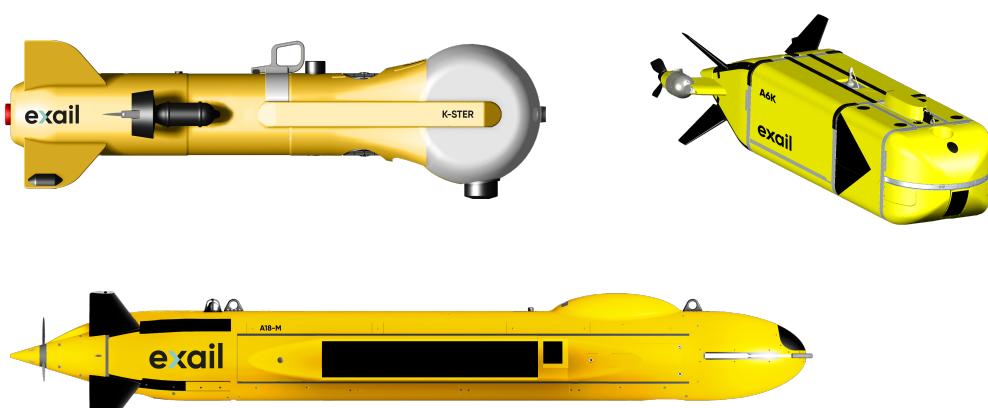


## Plateformes

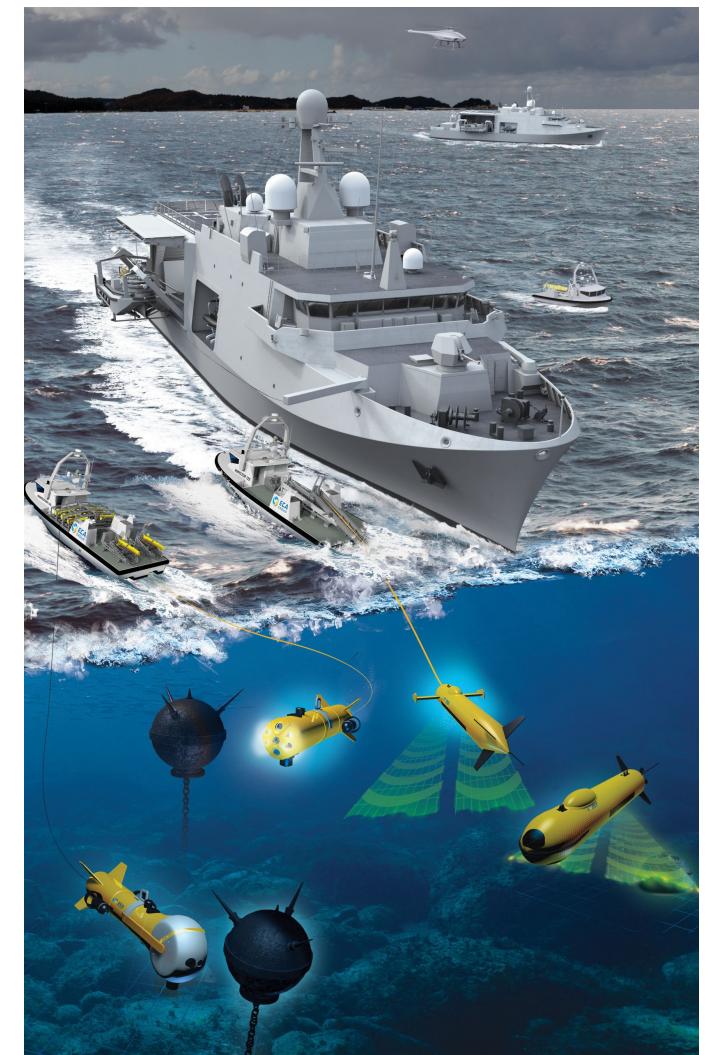
Drones de surface



Drones sous-marins



## Systèmes complexes



# Quelques applications de la navigation惯性

Permettre une estimation autonome et continue de la position, de la vitesse et de l'attitude.

**Défense terrestre**



**Défense navale**



**Lanceurs & satellites**



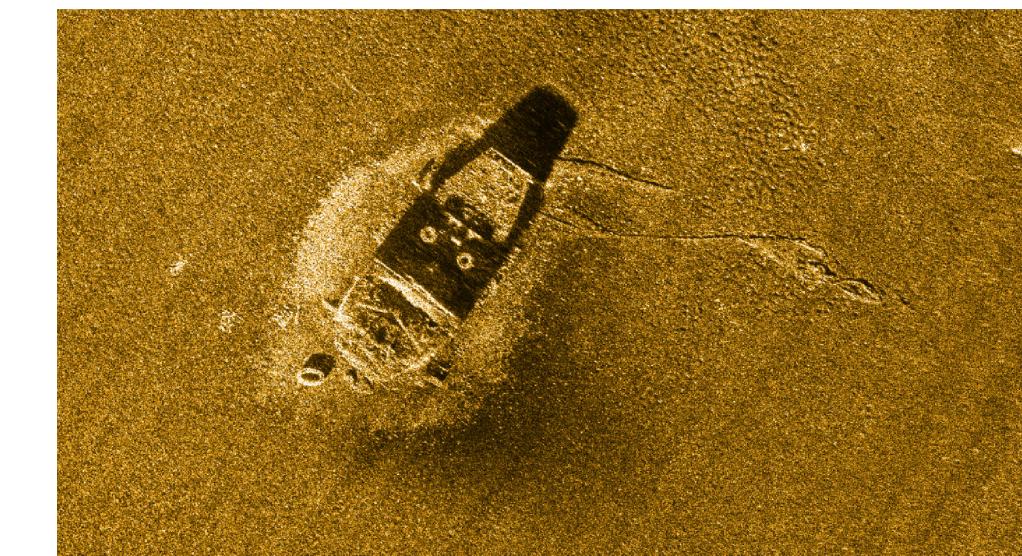
**Opérations maritimes**



**Exploitation minière**



**Cartographie mobile**



# Les algorithmiciens du pôle Navigation

## Activités de l'équipe

- Modélisation des capteurs inertIELS :
  - Compensations mécaniques du montage.
  - Compensations thermiques.



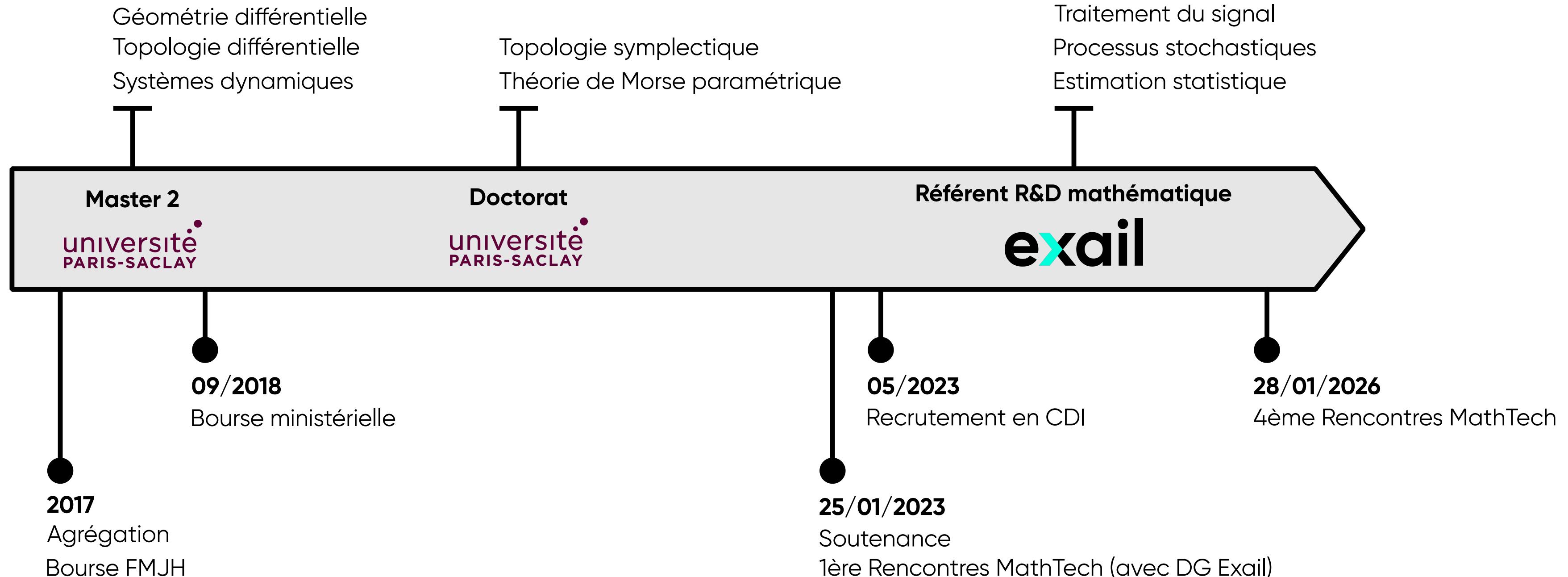
- Estimation des données de navigation :
  - Intégration des données inertielles.
  - Couplage avec des capteurs externes.

## Composition de l'équipe

- 16 membres permanents, dont 7 docteurs :
  - 3 en traitement du signal.
  - 2 en mathématiques fondamentales.
  - 1 en robotique.
  - 1 en mécanique des fluides numérique.
- 5 étudiants en formation, dont 1 alternant.



# Mon parcours académique et professionnel



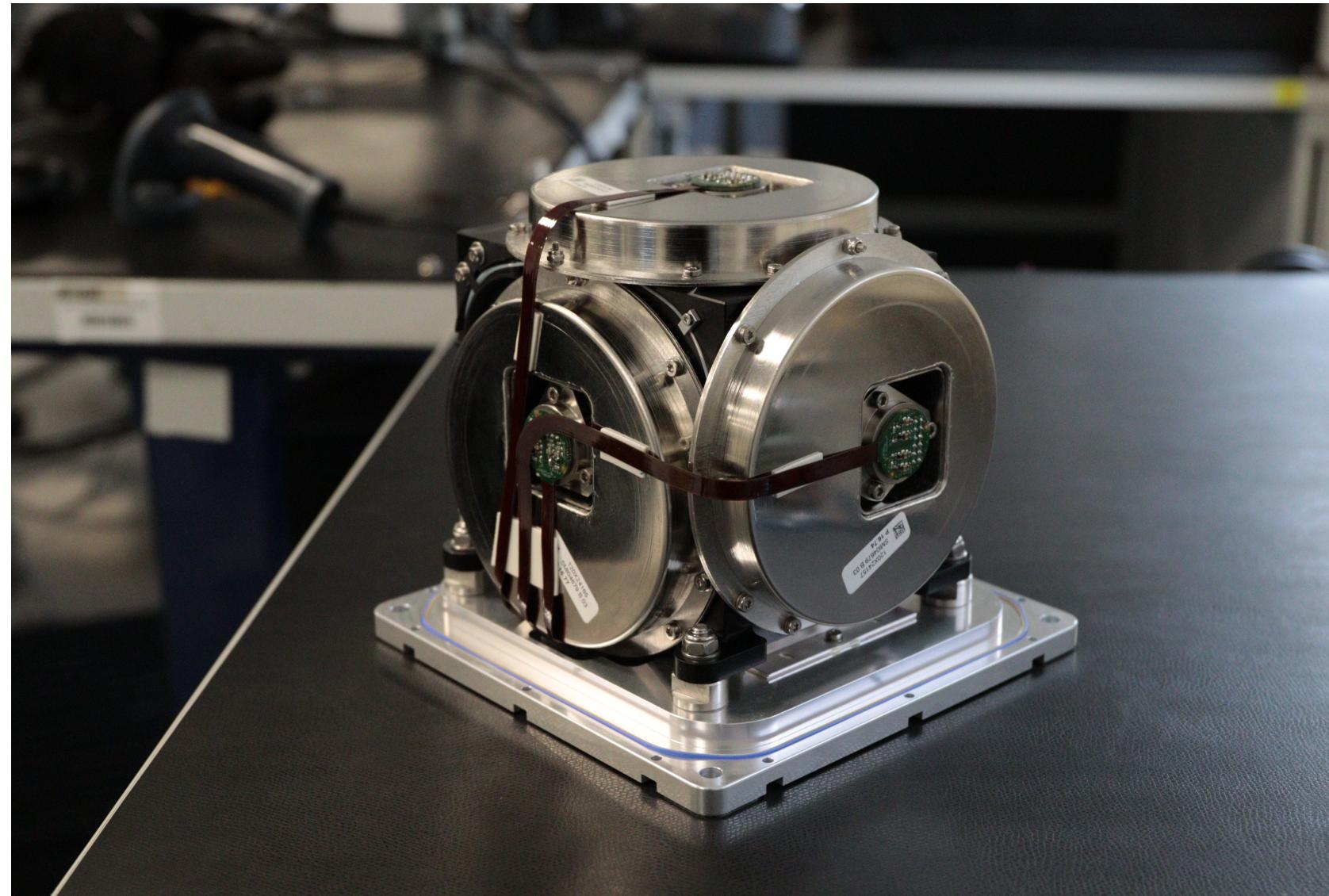
## Pourquoi rejoindre l'industrie de pointe ?

- Bénéficier d'un environnement pluridisciplinaire exigeant.
- Résoudre des problèmes réels à impact concret.
- Construire une carrière stable et bien rémunérée.

# LA NAVIGATION INERTIELLE

Une histoire de géométrie et de statistiques

# Le fonctionnement d'une centrale inertielle



## ➤ Une centrale inertielle est composée de

- 3 gyromètres qui mesurent la vitesse angulaire ; et de
- 3 accéléromètres qui mesurent l'accélération linéaire.

## ➤ Principe d'équivalence d'Einstein :

- Les accéléromètres mesurent la différence à la chute libre :

$$\text{acc}_{\text{mes}} = \text{acc}_{\text{dyn}} - G.$$

- La connaissance du champ de gravité est essentielle.

## ➤ Convertir les mesures inertielles en position :

- Les gyromètres donnent l'angle de pointage.
- Les accéléromètres déterminent le plan horizontal.

# Le comportement des erreurs inertielles en navigation terrestre

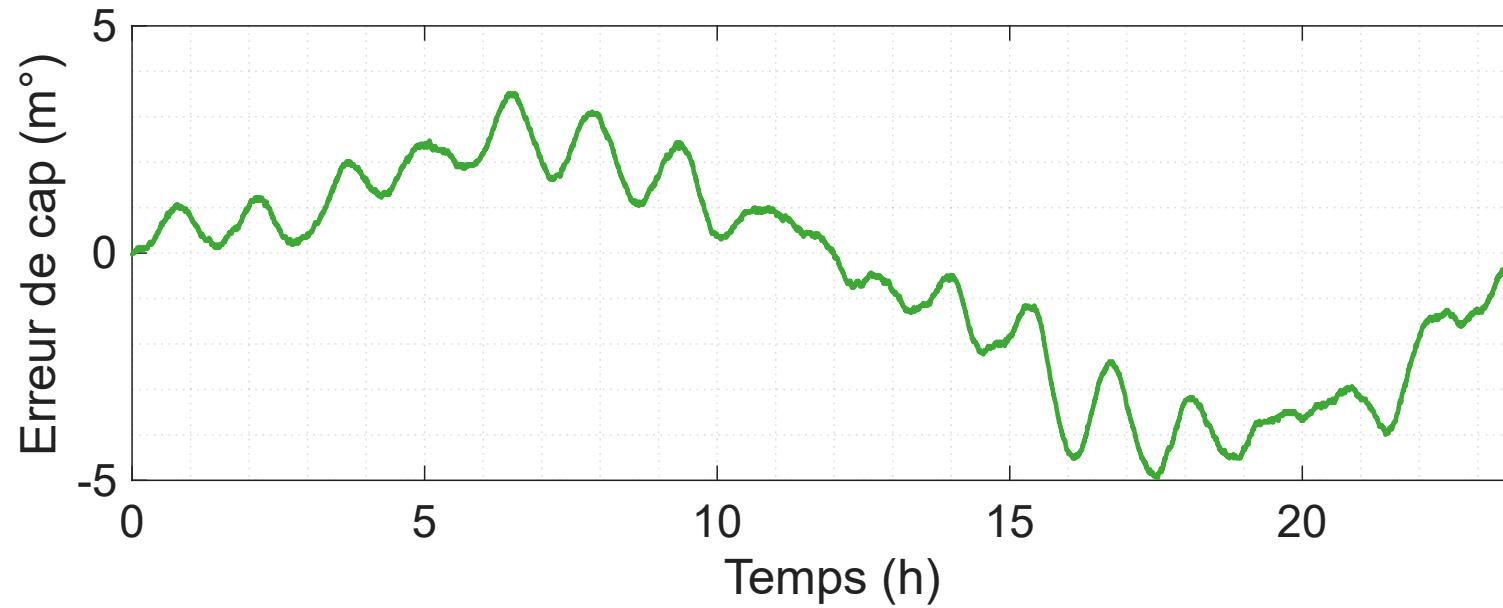
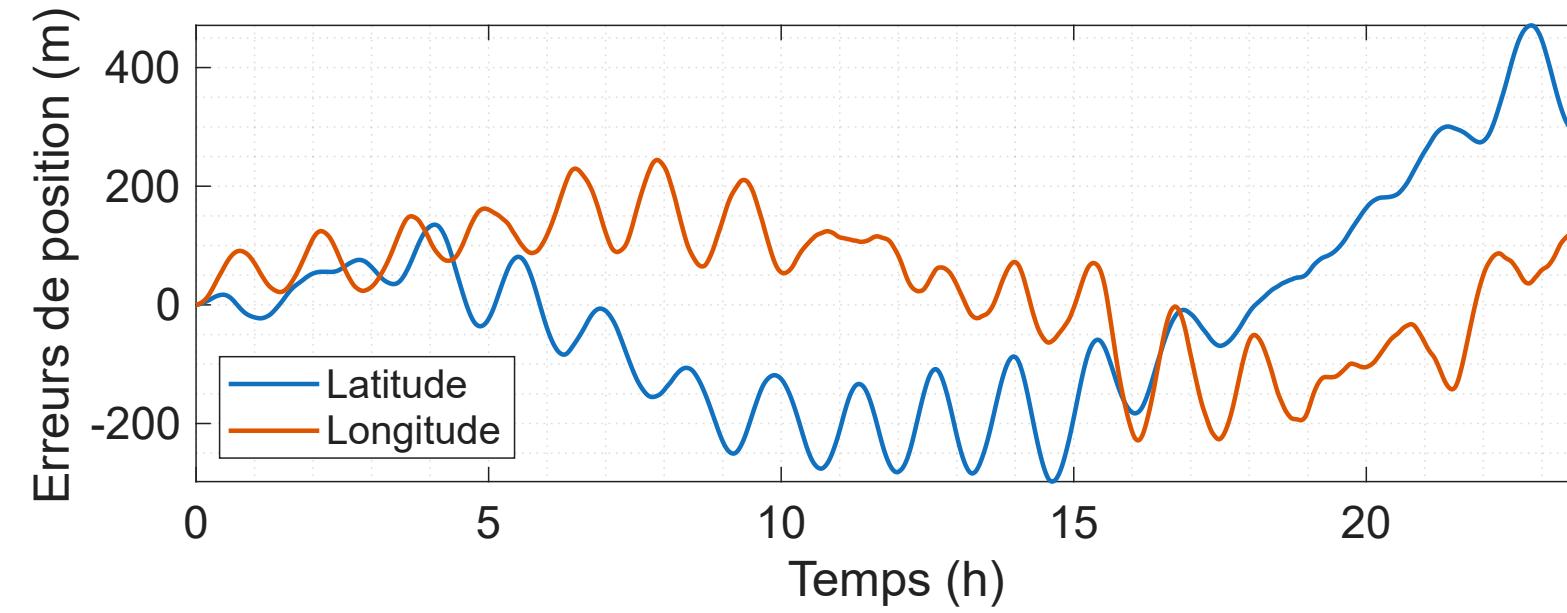
Estimation de la position par double intégration de l'accélération géographique.

- Les accéléromètres mesurent l'accélération propre du véhicule dans le repère inertiel.
- Ces mesures doivent être compensées des effets géophysiques et exprimées dans le repère géographique.

Ces corrections introduisent différents modes d'erreurs de navigation.

<b>Terre</b>	<b>Compensations</b>	<b>Composantes</b>	<b>Phénoménologie</b>	<b>Explications</b>
Rotation	Direction	Équatoriales	Oscillations bornées à 24h Période sidérale de la Terre	Équateur penché
	Norme	Longitude	Divergence linéaire	Période sidérale altérée
Pesanteur	Direction	Horizontales	Oscillations bornées à 84min Période de Schuler $2\pi\sqrt{R_T/g}$	Courbure de la Terre Vitesse N/W $\Leftrightarrow$ Rotation W/N
	Norme	Verticales	Divergence exponentielle	Décroissance de la pesanteur avec l'altitude

# L'hybridation avec des capteurs externes



➤ **Problème :** Plusieurs kilomètres d'erreurs en 1h.

- Divergence non maîtrisée de la longitude et de l'altitude.
- Précision insuffisante pour certaines applications.

➤ **Solution :** Fusionner des mesures redondantes.

- Position : GNSS (satellites), USBL (acoustique).
- Vitesse : odomètre, DVL (acoustique).
- Distance : LBL (acoustique).

➤ **Exploiter le formalisme des représentations d'état.**

- Estimation de processus stochastiques.
- Utilisation du filtrage de Kalman (étendu ou inodore).

# Le filtre de Kalman

Soit une représentation linéaire d'état :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad (\text{équation de propagation})$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \quad (\text{équation de mesure})$$

où  $(\mathbf{v}_t)_t$  et  $(\mathbf{w}_t)_t$  sont des bruits de moyenne nulle et de covariance  $\mathbf{Q}_t$  et  $\mathbf{R}_t$ , respectivement.

**Objectif :** Exploiter les mesures pour estimer les états du système dynamique stochastique.

## Algorithme (Kalman, 1960)

Le filtre de Kalman est un estimateur  $(\hat{\mathbf{x}}_{t|t})_t$  récursif de  $(\mathbf{x}_t)_t$  défini par les équations de prédiction et de correction suivantes :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1},$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{F}_t^\top + \mathbf{Q}_t,$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1},$$

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^\top + \mathbf{R}_t,$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{y}_t,$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{z}_t,$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_{t|t-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^\top + \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t^\top, \quad (\text{formule de Joseph})$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_{t|t-1},$$

où le *gain de Kalman*  $\mathbf{K}_t$  est donné par  $\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^\top \mathbf{S}_t^{-1}$ .

Le filtre de Kalman réalise une combinaison linéaire des mesures.

# Les performances du filtre de Kalman

## Théorème (Kalman, 1960)

Si  $(\mathbf{v}_t)_t$  et  $(\mathbf{w}_t)_t$  sont des bruits blancs indépendants, c'est-à-dire que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}\forall t, \forall s, \mathbb{E}(\mathbf{v}_s \mathbf{v}_t^\top) &\propto \delta_{t-s}, \mathbb{E}(\mathbf{w}_s \mathbf{w}_t^\top) \propto \delta_{t-s}, \\ \forall t, \mathbb{E}(\mathbf{v}_t \mathbf{w}_t^\top) &= 0,\end{aligned}$$

alors par construction de  $\mathbf{K}_t$ , il vient  $\mathbb{E}((\hat{\mathbf{x}}_{t|t} - \mathbf{x}_t) \mathbf{y}_t^\top) = 0$ , et  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  est la projection orthogonale de  $\mathbf{x}_t$  sur  $\text{Vect}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t)$ , donc :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}} \in \text{Vect}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t)} \mathbb{E}(\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_t\|^2 | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t).$$

Ainsi, le filtre de Kalman est le meilleur estimateur linéaire, au sens de l'erreur quadratique moyenne.

Si de plus  $(\mathbf{v}_t)_t$  et  $(\mathbf{w}_t)_t$  sont gaussiens, alors  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t)$  et  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  est l'estimateur du maximum a posteriori, donc :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbb{E}(\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_t\|^2 | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t), \\ &= \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbb{P}(\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}} | \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t). \quad (\text{régression bayésienne})\end{aligned}$$

# Le filtre de Kalman en navigation inertielle

Les hypothèses d'optimalité du filtre de Kalman ne sont pas vérifiées en navigation inertielle.

Limitations	Exemples	Contournements
Linéarité des modèles	Procédure d'alignement Mesures LBL proche des amers	18 hypothèses de cap initial Représentation d'états sur les erreurs Linéarisation des équations de mesure
Blancheur des bruits	Instabilité des erreurs inertielle Corrélation des erreurs GNSS	Augmentation du nombre d'états (50+ états)
Gaussianité des bruits	Queue lourde des erreurs USBL	Réjection des mesures selon les innovations

Le filtre de Kalman a marqué l'histoire de la navigation inertielle spatiale :

- Dès 1961, Stanley Schmidt, alors ingénieur à la NASA, en perçoit le potentiel.
- Il est ensuite utilisé avec succès lors de la mission lunaire Apollo 11 en juillet 1969.

# UN FILTRE DE KALMAN PROFOND

Dépasser les limites des estimateurs statistiques classiques

# Quel rôle pour l'apprentissage profond en navigation inertielle ?

## Apports potentiels

- Détection des anomalies capteurs.
  - Réjections des mesures.
- Gestion des mesures complexes.
  - Mesures de distance non-linéaires.
  - Erreurs GNSS corrélées.
- Substitut de la modélisation physique.
  - Environnement (e.g. courant marin).
  - Dynamique des véhicules.

## Limites d'utilisation

- Entraînement des modèles.
  - Construction des vérités terrain.
  - Collecte massive de données.
- Généralisation des modèles.
  - Combinatoire des paramètres.
- Projections de performance.

# L'exemple des filtres de Kalman profonds

## Filtres de Kalman profonds

- Covariances des bruits  $\mathbf{Q}_t$  et  $\mathbf{R}_t$  inconnues.
- Conservation de la structure du filtre de Kalman.
- Apprentissage du gain (et de la covariance).
- **Modèle fondateur** : KalmanNet, Revach et al. (2022).
- **État de l'art** : Cholesky-KalmanNet, Ko et al. (2024).

## Organisation de notre activité de R&D

- Veille scientifique et technologique.
- Développement d'un filtre de Kalman profond.
- 2 publications dans des actes de conférence.
- Recrutement de 3 stagiaires.
- Ouverture prochaine d'une thèse CIFRE.

# L'architecture du Recursive KalmanNet

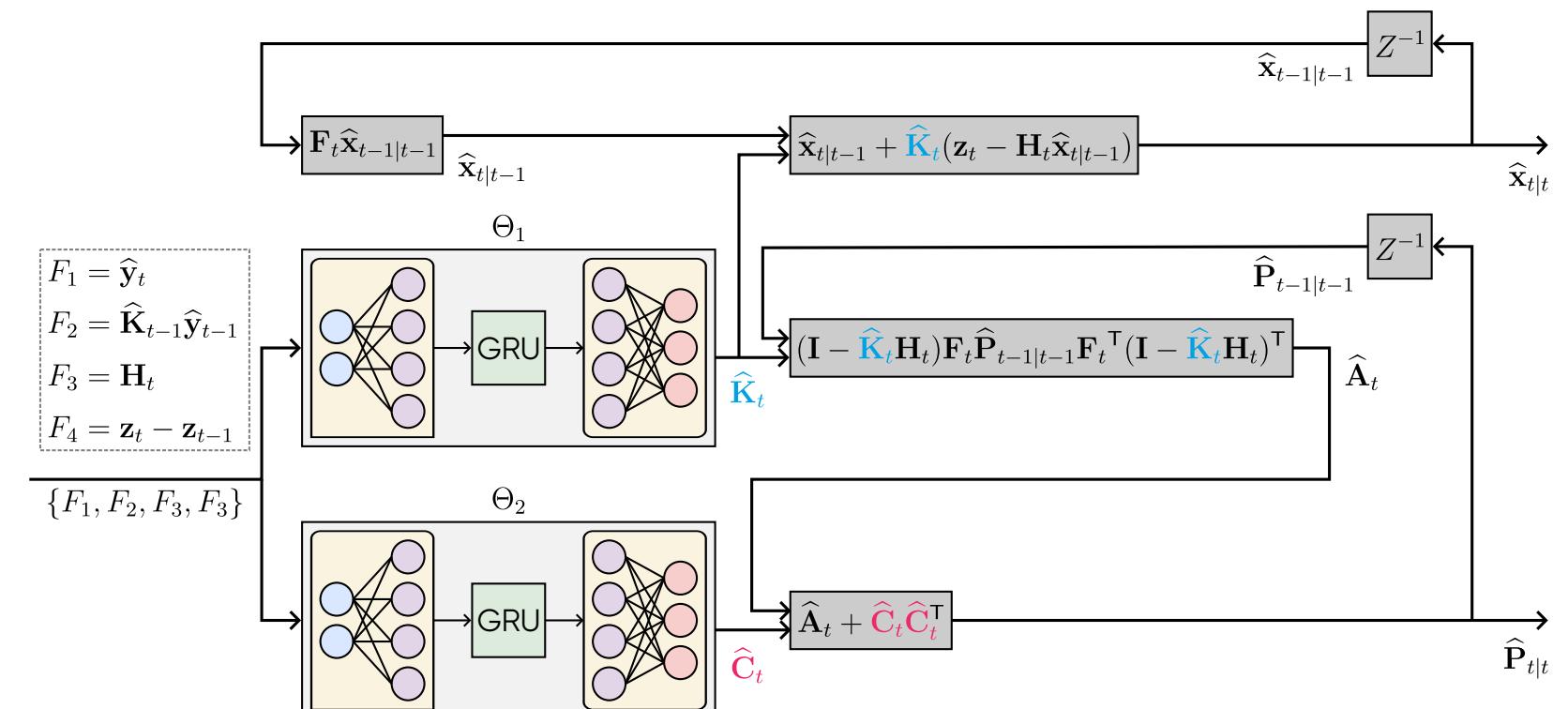
- Gain de fusion  $\hat{\mathbf{K}}_t$  appris par RNN.
- Covariance  $\hat{\mathbf{P}}_{t|t}$  décomposée via la formule de Joseph :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_{t|t} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_{t|t-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^\top + \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t^\top, \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) (\mathbf{F}_t \hat{\mathbf{P}}_{t-1|t-1} \mathbf{F}_t^\top + \mathbf{Q}_t) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t)^\top + \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t^\top, \\ &= \underbrace{(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{P}}_{t-1|t-1} \mathbf{F}_t^\top (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{H}_t)^\top}_{\text{Connu}} + \underbrace{(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{Q}_t (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{H}_t)^\top + \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{R}_t \hat{\mathbf{K}}_t^\top}_{\text{Facteur de Cholesky appris par RNN}}.\end{aligned}$$

- Entraînement supervisé par descente de gradient.
- Perte de log-vraisemblance négative gaussienne :

$$\mathbb{E}_t (\mathbb{E}_{\mathbf{x}_t} ((\hat{\mathbf{x}}_t(\Theta_1) - \mathbf{x}_t)^\top \hat{\mathbf{P}}_{t|t}(\Theta_1, \Theta_2)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_t(\Theta_1) - \mathbf{x}_t) + \log \det \hat{\mathbf{P}}_{t|t}(\Theta_1, \Theta_2))),$$

avec régularisation  $\ell_2$  des poids  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  du modèle.



# Le cadre des simulations numériques

## Représentation d'état

Cinématique 1D à vitesse constante :

- Bruit blanc en accélération
- Mesure de position

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix},$$
$$z_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t + w_t.$$

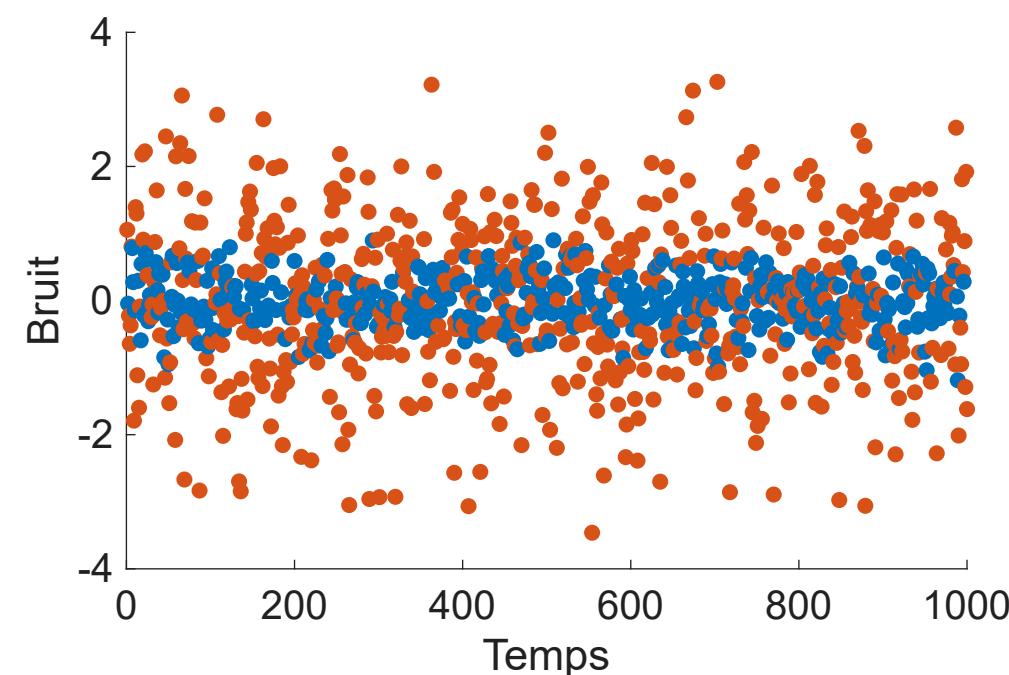
## Filtres de Kalman

Différents réglages de  $R_t$  :

- Optimal (o-KF) :  $R_t = \mathbb{E}(w_t w_t^\top)$ .
- Réaliste (so-KF) :  $R_t \equiv 1$ .

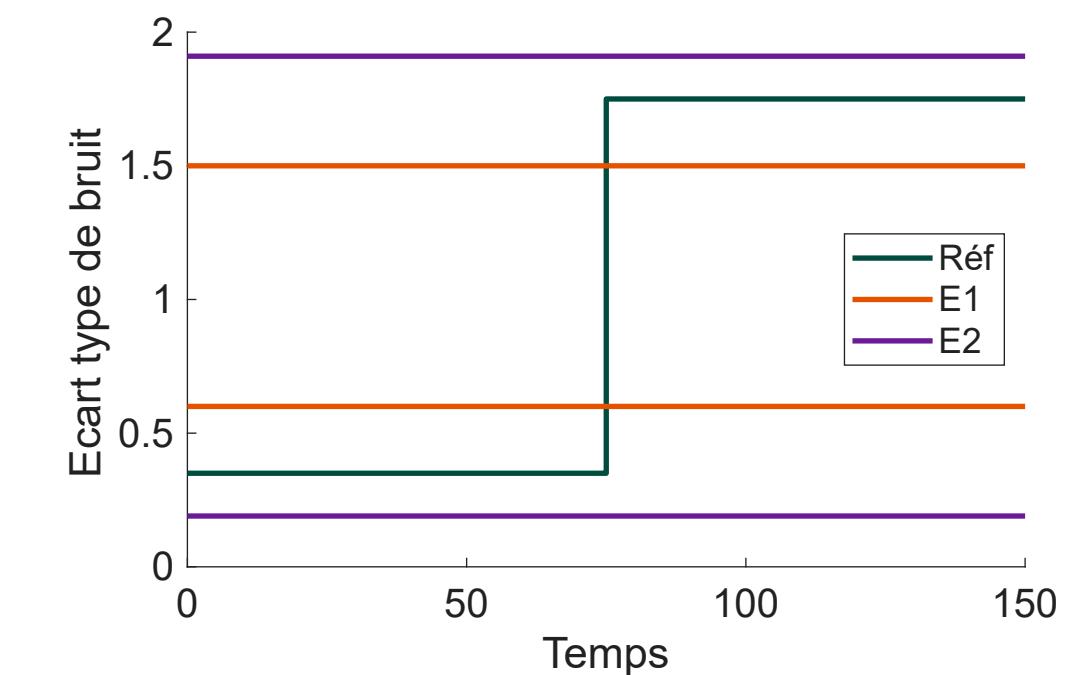
## Scénario 1: $w_t$ non-gaussien

Mélange Bernouilli de gaussiennes :



## Scénario 2 : Généralisation sur $w_t$

3 configurations d'écart type :

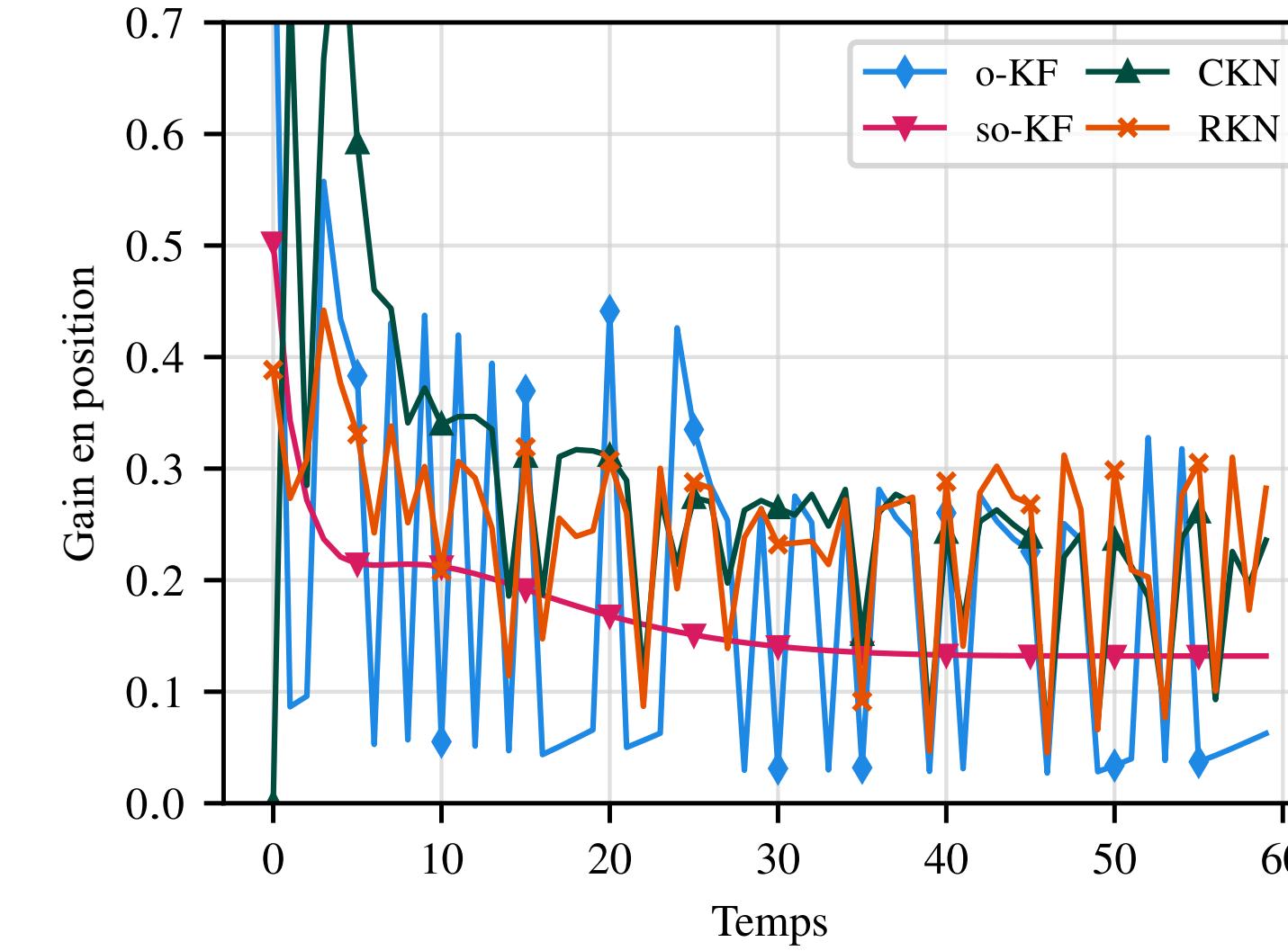
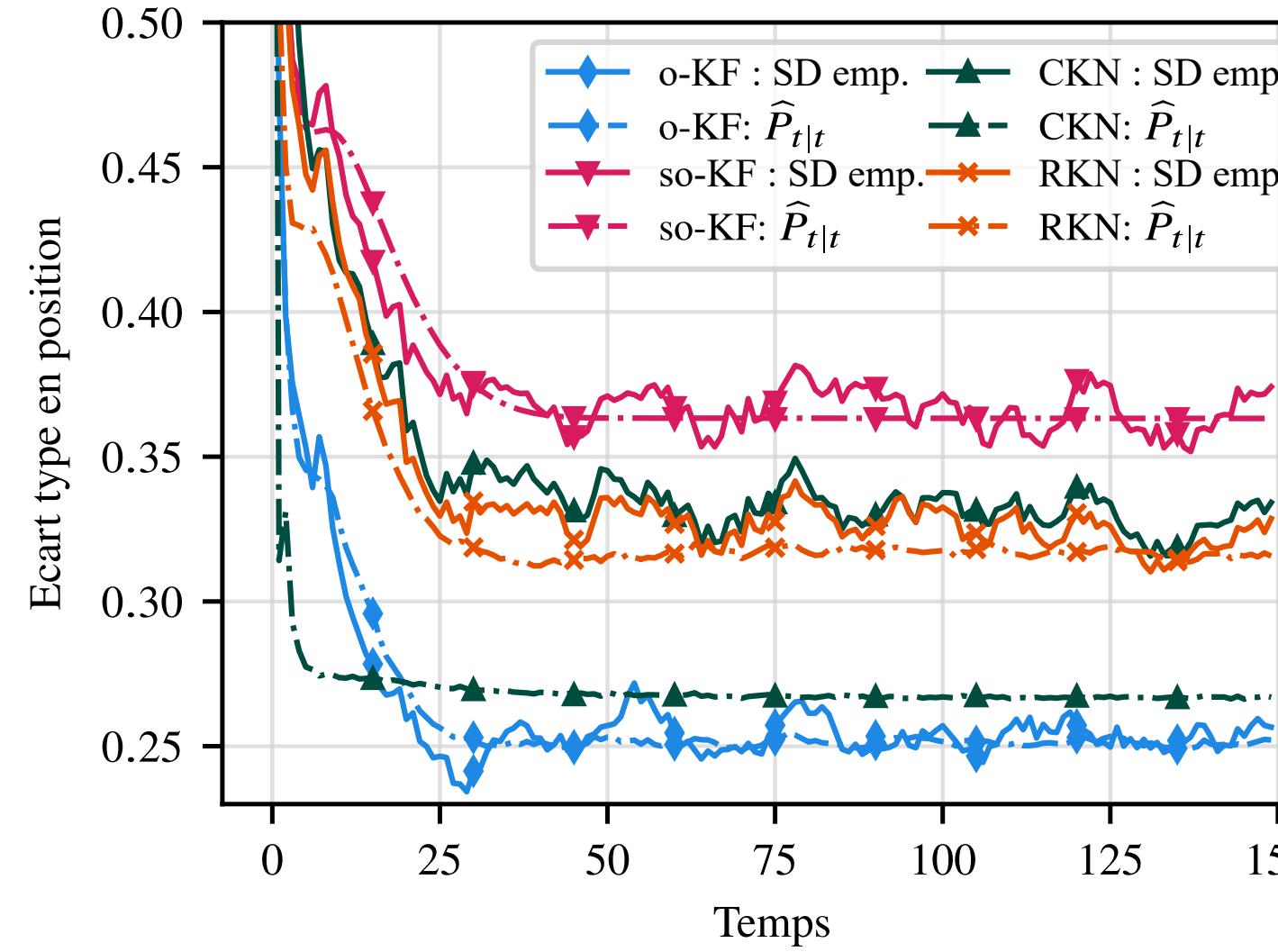


$X_t, Y_t, Z_t$  indépendantes telles que :

$$w_t = Z_t + (1 - Z_t)Y_t,$$
$$X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), Y_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2), Z_t \sim \mathcal{B}(p).$$

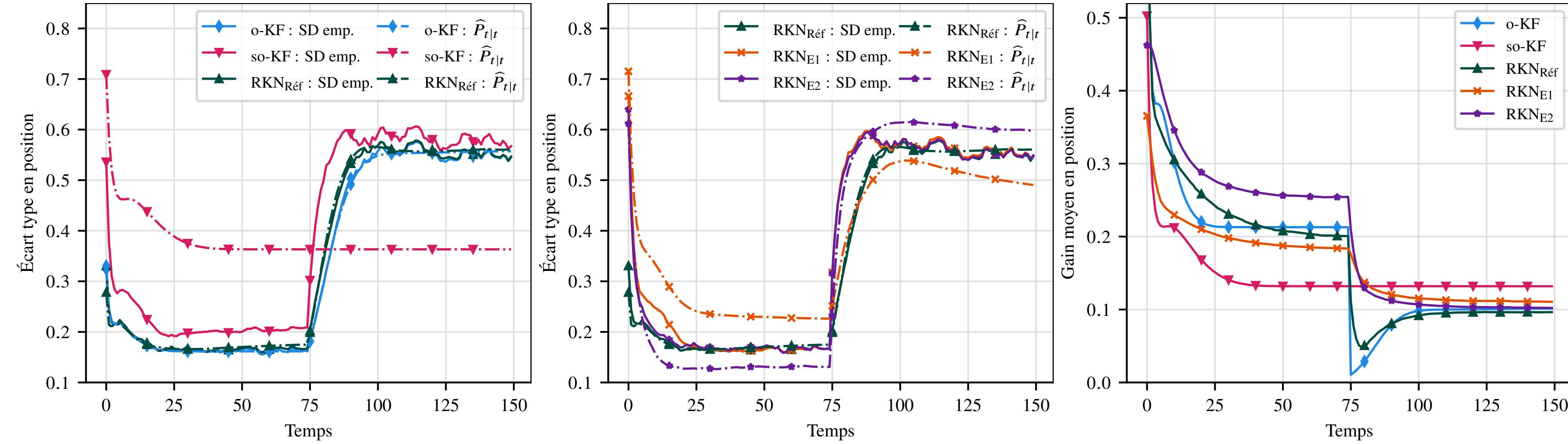
3 modèles entraînés sur Réf, E1 et E2.

# Les performances du Recursive KalmanNet pour des bruits non-gaussiens



- Le RKN surpassé le so-KF et le CKN en précision et en représentativité.
- La précision et la représentativité du RKN se rapprochent de celles du o-KF.
- Le RKN ajuste son gain en fonction du bruit de mesure, contrairement au so-KF.

# Les capacités de généralisation du Recursive KalmanNet



- Tous les RKN surpassent le so-KF en précision et en représentativité.
- La précision et la représentativité du RKN<sub>Réf</sub> se rapprochent de celles du o-KF.
- Les RKN perdent en représentativité en situation de généralisation.
- Tous les RKN ont des gains asymptotiques proches du o-KF, et ajustent leurs gains en fonction du bruit de mesure.

# Quelle stratégie de déploiement de l'apprentissage profond chez Exail ?

## Filtres de Kalman profonds

- Estimations potentiellement plus robustes.
- Capacité de généralisation limitée.
  - Forte dépendance aux données d'entraînement.
- Fonction principale des centrales inertielles.
  - Exigences critiques de fonctionnement.

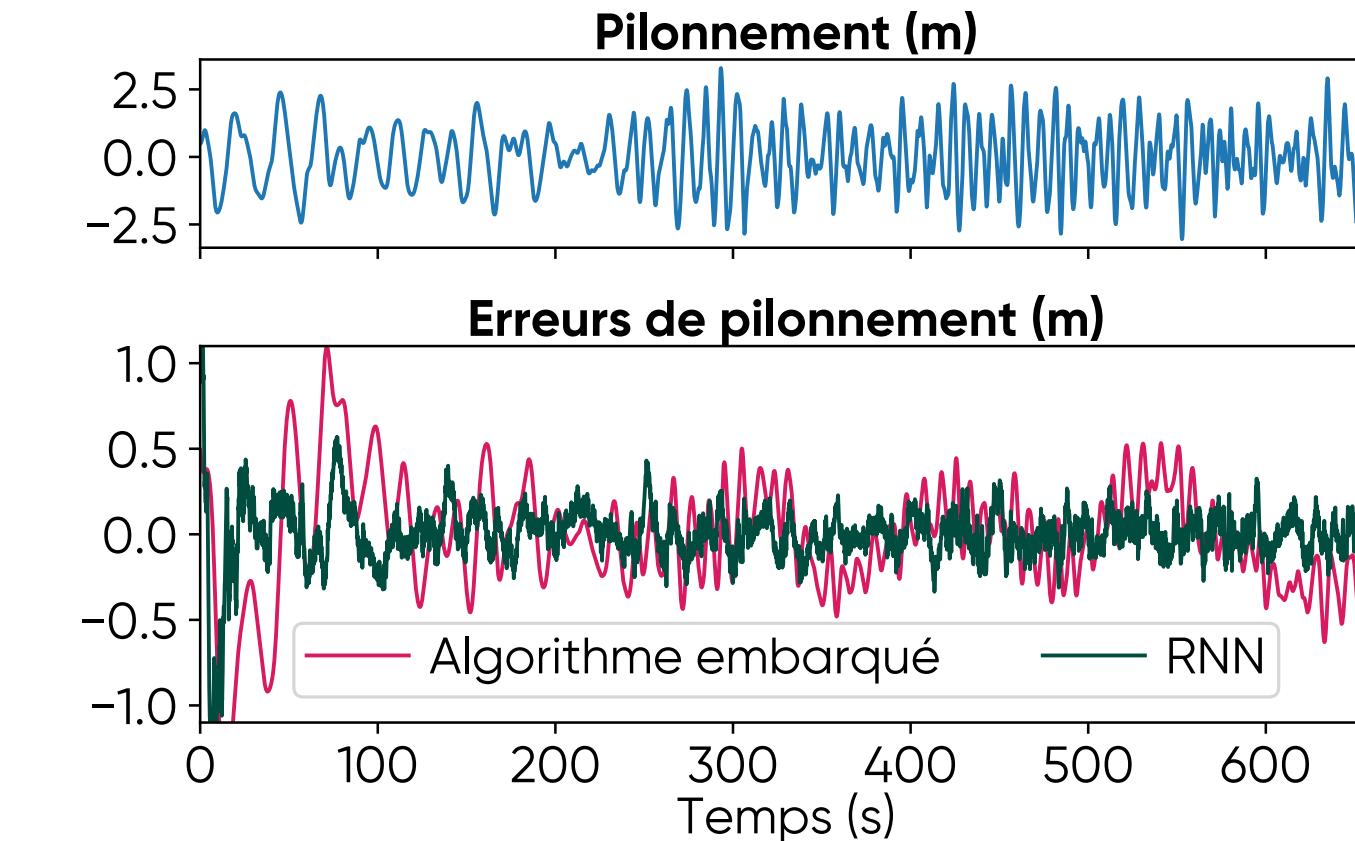
Déploiement impossible comme filtre de navigation.

## Cas d'application ciblés

- Systèmes de faible dimension.
- Fonctions auxiliaires des centrales inertielles.

## Exemple : Estimation du pilonnement par RNN

- Système physique à 6 degrés de liberté :
  - Porteur : cap, vitesse avant, accélération verticale.
  - Houle : direction, fréquence, hauteur.
- Sortie dédiée des centrales inertielles.
- Précision accrue et convergence plus rapide.



exail