



Recursive KalmanNet : Capacités de généralisation

Cyril Falcon, Hassan Mortada, Mathéo Clavaud, Jean-Philippe Michel

Exail – R&D Navigation, 34 rue de la Croix de Fer, 78100, Saint-Germain-en-Laye, France

À propos d'Exail

- Un groupe industriel **français**.
- Un acteur majeur des **hautes technologies** :
 - Robotique
 - **Navigation**
 - Photonique
- Une **intégration verticale** des produits.
- Plus de **2000 collaborateurs** dans **80 pays**.

Contexte

Soit une représentation linéaire d'état :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{F}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t, & \mathbf{v}_t &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_t) \\ \mathbf{z}_t &= \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \mathbf{w}_t &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_t) \end{aligned}$$

Question : Comment estimer les états \mathbf{x}_t à partir d'observations bruitées \mathbf{z}_t , et quantifier les incertitudes associées ?

Le **filtre de Kalman** (KF) est un estimateur linéaire récursif qui réalise la fusion des prédictions et des observations via un gain calculé analytiquement.

Problématique

Bruits et performance du filtre de Kalman :

	Blancs	Indépendants	Gaussiens
BLUE	X	X	
MMSE	X	X	X

BLUE = Best Linear Unbiased Estimator
MMSE = Minimal Mean Square Error

Des **hypothèses rarement satisfaites** en pratique.

Objectif : Construire un estimateur qui s'affranchit d'hypothèses *a priori* sur la distribution statistique des bruits \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t , et donc sur \mathbf{Q}_t et \mathbf{R}_t .

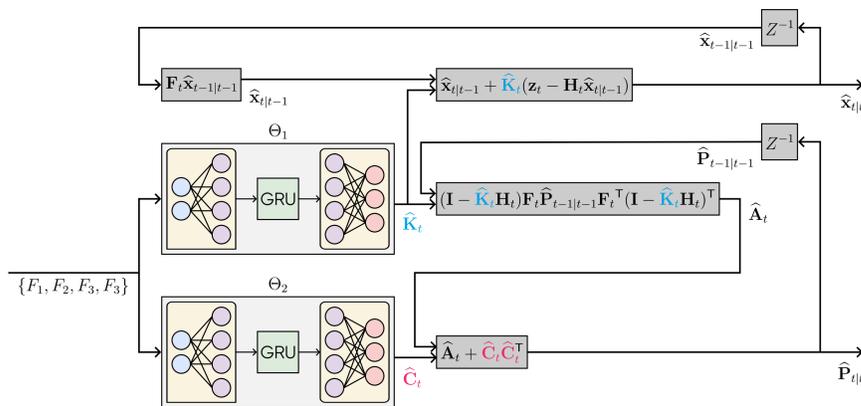
Recursive KalmanNet (RKN)

Gain de fusion $\hat{\mathbf{K}}_t$ appris par un RNN en substitut à sa forme analytique classique, voir [2].

Covariance $\hat{\mathbf{P}}_{t|t}$ décomposée via la formule de Joseph, applicable à des gains de fusion appris.

- Composante déterministe $\hat{\mathbf{A}}_t$ calculée à partir de la sortie du RNN apprenant le gain.
- Composante stochastique apprise par un second RNN à travers son facteur de Cholesky $\hat{\mathbf{C}}_t$, voir [1].

Entrée	Définition
F_1	$\mathbf{z}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t t-1}$ Innovation
F_2	$\hat{\mathbf{x}}_{t-1 t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1 t-2}$ Correction à $t-1$
F_3	\mathbf{H}_t Matrice de mesure
F_4	$\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_{t-1}$ Différence des mesures



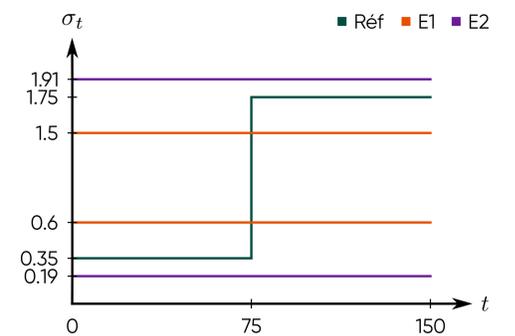
Entraînement supervisé : Descente de gradient sur la log-vraisemblance gaussienne + régularisation ℓ^2 .

Ensembles de données

Cinématique 1D position/vitesse avec bruit blanc d'accélération et **mesures de position** :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t, & \mathbf{Q}_t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{z}_t &= (1 \ 0) \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \mathbf{R}_t &= \sigma_t^2 \end{aligned}$$

5 types d'écart type de **bruit de mesure** σ_t :



Pour générer **3 ensembles de données** de 1000 séries temporelles de 150 échantillons.

Performances du Recursive KalmanNet

Liste des estimateurs :

Nom	Méthode
RKN_{E1}	RKN entraîné sur E1 Test d'interpolation
RKN_{E2}	RKN entraîné sur E2 Test d'extrapolation
RKN_{Réf}	RKN entraîné sur Réf RKN optimal
so-KF	KF avec $R_t = \mathbf{I}^2$ KF sous-optimal
o-KF	KF avec $R_t = \sigma_t^2$ Estimateur optimal

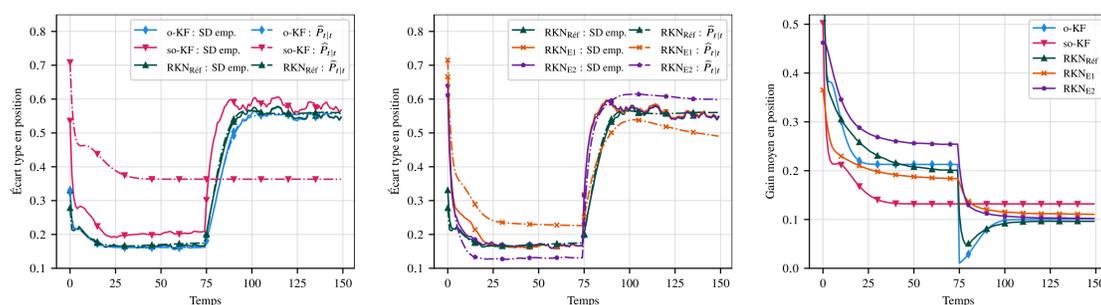
Métriques de performance :

$$EQM(t) = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{x \in \mathcal{T}} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^T (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)$$

$$EQMN(t) = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{x \in \mathcal{T}} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^T \hat{\mathbf{P}}_{t|t}^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)$$

où \mathcal{T} est l'ensemble de test issu de Réf.

Performances en **précision et représentativité des covariances des erreurs** évaluées sur Réf :



Commentaires des figures :

- Tous les RKN surpassent le so-KF en précision et en représentativité.
- La précision et la représentativité du RKN_{Réf} se rapprochent de celles du o-KF.
- Les RKN perdent en représentativité en situation de généralisation.
- Tous les RKN ont des gains asymptotiques proches du o-KF.
- Tous les RKN ajustent leurs gains en fonction du bruit de mesure, contrairement au so-KF.

Performance en $EQM(t)$:

	à 70	à 80	à 150
RKN_{E1}	0.04	0.38	0.45
RKN_{E2}	0.04	0.37	0.45
RKN_{Réf}	0.04	0.15	0.44
so-KF	0.06	0.33	0.49
o-KF	0.04	0.11	0.45

Performance en $EQMN(t)$:

	à 70	à 80	à 150
RKN_{E1}	1.40	3.25	2.48
RKN_{E2}	3.21	2.77	1.84
RKN_{Réf}	1.86	2.10	2.05
so-KF	1.10	2.53	3.87
o-KF	2.09	1.94	1.94

Selon le TCL : $EQMN(t) \sim \mathcal{N}(2, 0.004)$.

Bibliographie

- [1] H. Mortada, C. Falcon, Y. Kahil, M. Clavaud, and J.-P. Michel. Recursive KalmanNet: Deep Learning-Augmented Kalman Filtering for State Estimation with Consistent Uncertainty Quantification. In *33rd Eur. Signal Process. Conf.*, 2025.
- [2] G. Revach, N. Shlezinger, X. Ni, A. L. Escoriza, R. J. G. Van Sloun, and Y. C. Eldar. KalmanNet: Neural Network-Aided Kalman Filtering for Partially Known Dynamics. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2022.