Homologie pour les familles génératrices des sous-variétés legendriennes et espaces de modules d'escaliers de gradient.

Introduction.

Pour comprendre la topologie des variétés de contact, il est notamment important de comprendre les isotopies de leurs sous-variétés legendriennes.

Les phénomènes de rigidité topologique rendent les sous-variétés legendriennes particulièrement remarquables :

- Deux sous-variétés legendriennes peuvent être isotopes parmi les sous-variétés lisses sans être isotopes parmi les sous-variétés legendriennes.
- Toute classe d'isotopie lisse d'une sous-variété legendrienne se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne.

Trois types de techniques se distinguent pour étudier la rigidité topologique des sous-variétés legendriennes :

- Théorie des courbes pseudo-holomorphes : augmentations de la dg-algèbre de Chekanov-Eliashberg.
- Théorie de Morse-Bott-Cerf : familles génératrices.
- Théorie microlocale des faisceaux.

Comprendre les liens entre ces différentes approches a été un moteur de recherche central et fructueux ces dernières années en topologie de contact.

Version optimiste : équivalence de A_∞-catégories.

Construction de la structure de A_∞-catégorie :

- Augmentations : Bourgeois-Chantraine (2014).
- Familles génératrices : seulement le produit est construit par Myer (2016).
- Faisceaux (en dimension 1) : Shende-Treumann-Zaslow (2016).

État de l'art des liens entre ces différentes approches :

- Shende-Treumann-Zaslow (2016) : en dimension 1, équivalence de A_∞-catégories entre les augmentations et les faisceaux.
- Fuchs-Rutherford (2011) : en dimension 1, construction combinatoire d'une augmentation ε à partir d'une famille génératrice F telle que $HCL^{\varepsilon}_{\bullet}(\Lambda) \cong HFG_{\bullet}(F)$.
- Rutherford-Sullivan (2017) : même chose en dimension 2.

Henry-Rutherford (2013) : en dimension 1

- Construction combinatoire d'une dg-algèbre associée à un nœud legendrien.
- Proposition d'une construction d'une dg-algèbre de familles génératrices.
- Conjecture : ces deux dg-algèbres se correspondent via un procédé de dégénérescence.

Ce procédé de dégénérescence permet de retrouver le résultat de Fuchs et Rutherford, mais en ayant moins recours à des arguments combinatoire, donc de manière robuste à la dimension.

Objectif de cet exposé :

- Présenter le procédé de dégénérescence.
- Donner les premiers pas vers la correspondance.

1. Homologie pour les familles génératrices.

$(J^1B = T^*B_{(q,p)} \times \mathbb{R}_z,\ \xi_B = \ker(dz - pdq))$ est une variété de contact.

Une sous-variété Λ de J^1B est legendrienne quand $T\Lambda \subset \xi_B$ et $\dim \Lambda = \dim B$.

(J^1B, ξ_B) est un modèle semi-local des variétés de contact au voisinage de leurs sous-variétés legendriennes difféomorphes à B.

Définition. Une fonction lisse $f : B_b \times \mathbb{R}^N_\eta \to \mathbb{R}$ est une famille génératrice dès que son lieu fibrement critique $\Sigma_f = \partial_\eta f^{-1}(0)$ est une sous-variété transversalement découpée, c'est-à-dire que 0 est une valeur régulière de la dérivée partielle de f dans la direction de la fibre $\partial_\eta f : B \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Le graphe de j^1f est automatiquement une sous-variété Legendrienne de $(J^1(B\times\mathbb{R}^N), \xi_{B\times\mathbb{R}^N})$.

Comment se ramener à J^1B ?

Construction. $T^*(B\times\mathbb{R}^N)$ et T^*B sont équipés de leurs structures symplectiques canoniques.

$C = T^*B \times \{0_{\mathbb{R}^N}\}$ est une sous-variété coisotrope de $T^*(B\times\mathbb{R}^N)$ et $T^*(B\times\mathbb{R}^N)/_{C^\perp}$ est canoniquement symplectomorphe à T^*B.

Γ_{df}, graphe de df, est une sous-variété lagrangienne de $T^*(B\times\mathbb{R}^N)$ qui est transverse à C.

$L_f = (\Gamma_{df} \cap C)/_{C^\perp}$ est une sous-variété lagrangienne immergée de T^*B qui se relève via les valeurs de f à une sous-variété legendrienne immergée Λ_f de (J^1B, ξ_B).

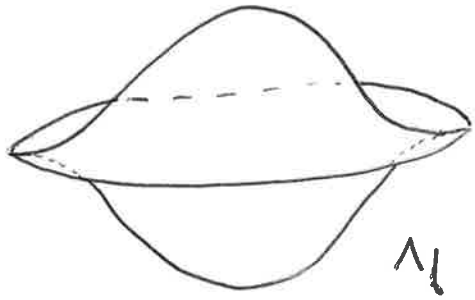
Formule : $\Lambda_f = \{(b, \partial_b f(b,\eta), f(b,\eta)) ; (b,\eta) \in \Sigma_f\}$.

Une famille génératrice de Λ est une famille génératrice f telle que $\Lambda_f = \Lambda$.

Remarque. Une sous-variété legendrienne est toujours localement décrite par une famille génératrice, mais toutes les sous-variétés legendriennes ne sont pas globalement décrites par des familles génératrices.

Exemple. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(b,\eta) \longmapsto \eta^3 + 3(\|b^2\| - 1)\eta$



Λ_f

$\Sigma_f = \{(b,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ ; \ \|b\|^2 + \eta^2 = 1\}$ sphère

Théorème. [Chaperon (1984), Laudenbach-Sikorav (1985), Sikorav (1986), Tchekanov (1996)]
Dans l'optique de l'étude des isotopies legendriennes, les familles génératrices sont adaptées à la description des sous-variétés legendriennes.

Fonction différence : $\delta(b,\eta_1,\eta_2) = f_1(b,\eta_1) - f_2(b,\eta_2)$, f_1 et f_2 familles génératrices de Λ.

Proposition. Les points critiques de δ sont de deux types :
1. les points critiques de valeur critique strictement négative (respectivement strictement positive) sont en correspondance bijective avec les cordes de Reeb de Λ.
2. Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, δ est de Morse-Bott dans la région $\{-\varepsilon < \delta < \varepsilon\}$.
Elle a une unique sous-variété critique et elle est difféomorphe à Λ.

Idée. Exploiter la théorie de Morse de la fonction différence pour construire des invariants par isotopie legendrienne.

Sans contrôle à l'infini sur les familles génératrices, il n'y a aucune chance que la théorie de Morse de la fonction différence fournisse des informations intéressantes sur la sous-variété legendrienne décrite.
$\rightsquigarrow$ toutes les familles génératrices seront linéaires à l'infini.

Définition. [Traynor (2001)]
$HFG_\bullet(f_1,f_2) = H_{\bullet+N+1}(\{\delta < \omega\}, \{\delta < \varepsilon\}; \mathbb{F}_2)$, où $\omega > \varepsilon > 0$ sont choisis de sorte à ce que toutes les valeurs critiques strictement positives de δ soient comprises dans $[\varepsilon, \omega]$.

Remarque. La classe d'isomorphisme de $HFG_\bullet(f_1,f_2)$ n'est pas invariante par isotopie legendrienne, mais $\{HFG_\bullet(f_1,f_2)/\text{isomorphisme} \ ; \ f_1, f_2 \text{ familles génératrices de } \Lambda\}$ l'est !

Limitations qui compromettent le calcul de cet invariant :

- La description des familles génératrices d'une sous-variété legendrienne donnée est souvent très qualitative.
- Contrairement au cas de l'homologie de Morse classique des variétés, les trajectoires de gradient de la fonction différence ne se lisent pas directement sur la sous-variété legendrienne, mais elles sont tracées dans un fibré vectoriel dans lequel la sous-variété legendrienne se plonge non canoniquement.

2. Dégénérescence de Henry et Rutherford.

Objectifs :

- Géométriser la différentielle de HFG.
- Écraser les trajectoires de gradient de la fonction différence sur la sous-variété legendrienne.

Idée. Exploiter l'invariance de l'homologie de Morse par rapport au choix de la métrique riemannienne.

- Partir d'une métrique riemannienne $g = g_B \oplus g_1 \oplus g_2$ avec $g_1 = g_2$ sur $B \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.
- Pour $s \in]0,1]$, définir $g_s = (s^{-1} g_B) \oplus g_1 \oplus g_2$.
- Faire tendre s vers 0.

Calcul immédiat : $\nabla_{g_s}\delta(b,\eta_1,\eta_2) = s\nabla_{g_B}(b,\eta_1,\eta_2) \oplus \nabla_{g_1} f_1(b,\eta_1) \oplus -\nabla_{g_2} f_2(b,\eta_2)$.

Explication intuitive de ce qui se passe quand s tend vers 0 :

- Deux régimes distincts selon si le point considéré est dans $S = \Sigma_{f_1} \times_B \Sigma_{f_2}$ ou non.
- Loin de S : $\lim_{s \to 0} \nabla_{g_s}\delta$ est dirigé selon la fibre.

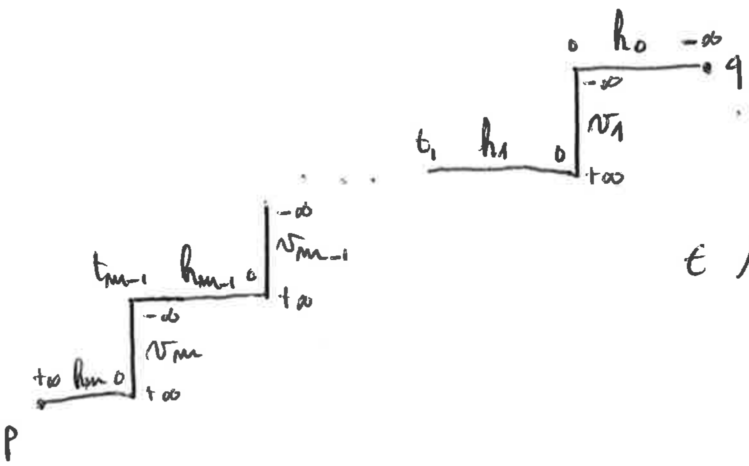
$\rightsquigarrow$ naissance d'un fragment vertical : trajectoire non-constante de $-\nabla_g \delta|_{\{b\} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}$.

- Proche de S : $\lim_{s \to 0} s^{-1}\nabla_{g_s}\delta$ est tangent à S.

$\rightsquigarrow$ naissance d'un fragment horizontal : trajectoire de $-\nabla_g(\delta_{|S})$.

Définition. Un escalier de gradient est une concaténation de trajectoires de gradient consécutives qui alternent entre fragments verticaux et fragments horizontaux, dans cet ordre, et commence par un fragment horizontal.

L'ensemble des escaliers de gradient joignant q à p est noté $\mathcal{M}^{esc}(q,p;\delta,g)$.



$\in \mathcal{M}^{ac}(q,p;f,g)$

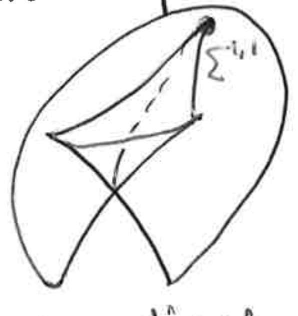
Fragments horizontaux : encodent la topologie de la sous-variété Legendrienne.

Fragments verticaux : encodent les bifurcations du complexe des points critiques de la famille génératrice vue comme une famille de fonctions sur la fibre paramétrée par la base.

Théorème [F. (en cours)]
Si Λ est $\Sigma^{1,1}$-régulière et générique et si $\mu(q)=\mu(p)+1$, alors il existe $s_0 \in]0,1]$ tel que pour tout $s\in]0,s_0]$, les espaces de modules $\mathcal{M}(q,p;f,g_s)$ et $\mathcal{M}^{ac}(q,p;f,g)$ sont finis et de même cardinal.

Restriction sur les singularités est une hypothèse technique raisonnable et probablement superflue.
. La caustique de la sous-variété Legendrienne n'a que des singularités de type bec.

bec ✓



queue d'aronde ✗

. Alvarez-Gavela (2016) : les obstructions à ce qu'une sous-variété Legendrienne donnée soit legendriennement isotope à une sous-variété Legendrienne $\Sigma^{1,1}$-régulière sont de nature homotopique uniquement.

Conditions de transversalité :
. Très précisément décrites et vérifiables en pratique.
. Hypothèse cruciale sans laquelle la dégénérescence de Hong et Rutherford pourrait produire des escaliers de gradient avec une infinité de fragments, puisqu'il peuvent a priori devenir arbitrairement courts.

Perspectives de recherche.

Enrichir la structure algébrique de HFG et comprendre les valeurs de ces invariants.

Géographie a été faite pour : • HFG. (b) (i.e. $f_1 = f_2$) [Bourgeois-Sabloff-Traynor (2015)]

• $HCL_{\cdot}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\Lambda)$ [Bourgeois-Galant (2019)]

⤳ poursuivre l'étude des liens entre les trois approches à la rigidité topologique des sous-variétés legendriennes.