Rapport sur le mémoire de thèse de Cyril FALCON :
« Homologies des familles génératrices de sous-variétés legendriennes et espaces de modules d'escaliers de gradient »

Alexandru OANCEA

IRMA, UMR 7501, Université de Strasbourg
Email : oancea@unistra.fr

Cyril FALCON apporte dans cette thèse une contribution importante à l'étude des sous-variétés legendriennes dans des fibrés de 1-jets. Le résultat principal de la thèse est un théorème de compacité séquentielle pour des trajectoires de Morse d'une fonction génératrice, dans un régime de limite adiabatique correspondant à une perturbation singulière de l'équation de gradient. La preuve combine une vision géométrique puissante avec des arguments analytiques délicats. Le théorème de compacité de Cyril FALCON démontre la première moitié d'un programme conjecturé par Henry et Rutherford en 2011.

Les sous-variétés legendriennes sont des objets centraux en topologie symplectique et de contact. Elles jouent un rôle essentiel en optique géométrique, analyse microlocale, dynamique hamiltonienne ou encore théorie des singularités. Dans ces contextes, les variétés de contact qui apparaissent naturellement sont les espaces de 1-jets $J^1(B) = T^*B \times \mathbb{R}$. Comme sous-variétés legendriennes on distingue les graphes des 1-jets de fonctions $B \to \mathbb{R}$ (« legendriennes holonomes ») et leurs images par isotopies de contact.

Cyril FALCON étudie les sous-variétés legendriennes compactes $\Lambda \subset J^1(B)$ qui admettent des familles génératrices linéaires à l'infini (*fgli*), i.e.,

$$\Lambda = \{\big(b, \partial_b f(b,\xi), f(b,\xi)\big) \,:\, \partial_\xi f(b,\xi) = 0\} \subset J^1(B)$$

avec $f : B\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ linéaire hors d'un compact. Un résultat profond, établi dans différents contextes par Chaperon, Laudenbach, Sikorav et Chekanov, affirme que cette classe inclut les sous-variétés legendriennes isotopes à la section nulle.

On associe à une legendrienne $\Lambda \subset J^1(B)$ son *front*, image de Λ sous la projection $J^1(B) \to B \times \mathbb{R}$. Si Λ admet une fonction génératrice f, son front est le diagramme de Cerf de la famille de fonctions $f|_{\{b\}\times\mathbb{R}^N} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. La *caustique* de Λ est l'ensemble des valeurs critiques de la projection $\Lambda \to B$.

L'invariant étudié par Cyril FALCON est *l'homologie des familles génératrices* GFH_*. Ceci est un invariant de la classe d'isotopie d'une legendrienne $\Lambda \subset J^1(B)$ munie d'une *fgli*, introduit par Traynor en 2001 et raffiné par la suite par Fuchs et Rutherford. Il est strictement plus fin que l'homologie singulière et coïncide avec l'homologie de contact linéarisée si dim $\Lambda = 1$. Pour la définition, on considère une *fgli* $f : B \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et on lui associe la *fonction différence*

$$\delta : B \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad \delta(b, \eta_1, \eta_2) = f(b, \eta_1) - f(b, \eta_2).$$

Les points critiques de δ d'action positive sont en correspondance bijective avec les cordes de Reeb de Λ. *L'homologie de la famille génératrice f* est

$$GFH_*(f) = H_{*+N+1}(\{\delta \leq w\}, \{\delta \leq \varepsilon\}; \mathbb{Z}/2), \qquad w \gg 1 \gg \varepsilon > 0.$$

(Le décalage dans le degré reflète la relation d'équivalence naturelle sur les *fgli*. Par ailleurs, l'auteur étudie aussi une version plus générale $GFH_*(f_1, f_2)$ qui implique deux *fgli*.)

Le fait de décrire un modèle *petit et calculable* pour l'homologie GFH_* est une question importante. Ici « petit » s'entend au sens cellulaire, et « calculable » s'entend dans un sens géométrique, impliquant le front de Λ. Un choix naturel de modèle petit est celui donné par le complexe de Morse de la fonction différence δ, mais celui-ci n'est malheureusement pas directement calculable à partir du front. Henry et Rutherford ont formulé en 2011 une conjecture qui postule que, dans une certaine limite adiabatique correspondant à une perturbation singulière de l'équation des trajectoires de gradient, la différentielle du complexe de Morse est déterminée par un comptage de trajectoires de gradient mixtes, constituées de morceaux « verticaux » contenus dans les fibres $\{b\} \times \mathbb{R}^N$, $b \in B$ et de morceaux « horizontaux » qui sont déterminés par le front de Λ. La démonstration de cette conjecture suppose deux étapes : un théorème de compacité (identification des configurations limites) et un théorème de recollement (recollement unique de toute configuration limite d'indice 0 en une trajectoire de gradient). Cyril FALCON démontre dans sa thèse la première moitié de ce programme.

Théorème de compacité (FALCON, §4, Théorème 4.1). *Soit $\Lambda \subset J^1(B)$ une legendrienne qui admet une* fgli. *On suppose que les singularités de la projection $\Lambda \to B$ sont des plis de Whitney. Pour une perturbation suffisamment générique de Λ et un choix de métriques génériques g_B et g_N sur B, resp. $\mathbb{R}^N$, une suite γ_k de trajectoires de gradient pour δ dont les extrémités sont des points critiques fixés $c_\pm$, considérées par rapport aux métriques $g_{s_k} = (s_k^{-1} g_B) \oplus g_N \oplus g_N$ avec $s_k \to 0^+$, converge en topologie de Gromov-Floer vers une trajectoire mixte horizontale-verticale reliant c_- à c_+.*

Il convient d'interpréter ce théorème via la notion de *système dynamique lent-rapide*. Notons $F = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ muni de la métrique $g_F = g_N \oplus g_N$. Étant donné un paramètre $s \in (0, 1]$, on considère la perturbation singulière de la métrique $g = g_B \oplus g_F$ donnée par $g_s = (s^{-1} g_B) \oplus g_F$, $s > 0$. Suivant la Section 3 de la thèse, le flot de gradient de la fonction différence $\delta : B \times F \to \mathbb{R}$ par rapport à la métrique g_s est le flot de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t b_s(t) & = & -s \nabla_{g_B} \delta(b_s(t), \eta_s(t)), \\ \partial_t \eta_s(t) & = & -\nabla_{g_F} \delta(b_s(t), \eta_s(t)), \end{array} \right.$$

où b_s et η_s désignent les composantes d'une solution le long de B, resp. F. En paramétrant les solutions par le « temps lent » $\tau = st$ on obtient l'équation équivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_\tau b_s(\tau) & = & -\nabla_{g_B} \delta(b_s(\tau), \eta_s(\tau)), \\ s \partial_\tau \eta_s(\tau) & = & -\nabla_{g_F} \delta(b_s(\tau), \eta_s(\tau)). \end{array} \right.$$

Les deux systèmes sont équivalents pour $s > 0$, mais *pas* dans la limite $s \to 0^+$. Le premier système converge vers

$$\begin{cases} \partial_t b_s(t) &= 0, \\ \partial_t \eta_s(t) &= -\nabla_{g_F} \delta(b_s(t), \eta_s(t)), \end{cases}$$

dont les solutions sont contenues dans des fibres $\{b\} \times F$ et sont déterminées par la famille génératrice. Le deuxième système converge vers

$$\begin{cases} \partial_\tau b_s(\tau) &= -\nabla_{g_B} \delta(b_s(\tau), \eta_s(\tau)), \\ 0 &= -\nabla_{g_F} \delta(b_s(\tau), \eta_s(\tau)), \end{cases}$$

dont les solutions sont contenues dans l'ensemble $\{\nabla_{g_F} \delta = 0\}$ et sont déterminées par le front de Λ.

Ceci est un exemple de *système lent-rapide* dans un régime adiabatique. Les techniques générales disponibles pour étudier de tels systèmes reposent sur une hypothèse d'hyperbolicité normale de l'ensemble invariant maximal (ici $\{\nabla_{g_F} \delta = 0\}$). Hélas, celle-ci fait défaut aux singularités de la caustique de Λ.

Cette absence d'outils pré-établis pour étudier la limite $s \to 0$ est la source de l'originalité de la thèse. Cyril FALCON y apporte les contributions suivantes :

(a). Formulation d'une nouvelle condition de généricité pour les sous-variétés legendriennes (« gradient generic », §1.3, Définition 1.11) et preuve du fait qu'elle est ouverte et dense dans l'espace des legendriennes dont la projection $\Lambda \to B$ possède comme singularités uniquement des plis de Whitney (§1.3, Théorème 1.2). La preuve utilise la hiérarchie de Thom-Boardman des singularités des caustiques legendriennes.

(b). Preuve du fait que les fragments « verticaux » extraits à la limite $s \to 0$ sont connectés par des fragments de gradient « horizontaux » (§4.1, Théorème 4.2). Pour extraire ces derniers, qui deviennent visibles uniquement après un changement d'échelle de temps, Cyril FALCON doit établir des estimées de convergence dans la limite adiabatique (§4.1, Propositions 4.2-4.5). Celles-ci sont un véritable tour de force analytique.

(c). Démonstration du fait que, sous cette hypothèse de généricité de gradient, le nombre de fragments de gradient « verticaux » qui peuvent être extraits d'une suite γ_k dans la limite adiabatique est nécessairement fini (§4.2, Théorème 4.3). Ceci est l'une des parties les plus fines de la thèse : en cas de non-finitude, les fragments « horizontaux » reliant les fragments « verticaux » devraient avoir un ordre de contact arbitrairement grand avec le lieu singulier du front legendrien, ce qui contredirait la condition de généricité de gradient du point (a).

L'étude menée par Cyril FALCON s'inspire d'autres études de dégénérescence adiabatique dans des contextes Morse-Bott (Frauenfelder, Banyaga et Hurtubise, Bourgeois et moi-même). À la différence de ces autres contributions, qui considèrent des dégénérescences de *fonctionnelles*, Cyril FALCON établit son théorème de compacité pour une dégénérescence de la *métrique*. Alors que l'esprit des preuves est le même, le cadre est très différent.

La thèse est écrite avec une grande assurance et un souci de clarté et de pédagogie remarquables. Les chapitres 1 et 4 contiennent les preuves des résultats principaux décrits ci-dessus. Le chapitre 2 réalise un excellent travail d'introduction aux familles génératrices et à leur homologie. Le chapitre 5 montre la force des outils développés par des calculs explicites sur des exemples significatifs. Le Chapitre 3 donne un aperçu intuitif du processus de limite adiabatique en préparation de la preuve du théorème principal. La thèse clôt avec une discussion de plusieurs perspectives de recherche qui mettent en évidence le rôle important que pourra jouer le théorème de compacité démontré dans la thèse.

L'ensemble de la thèse impressionne par la grande qualité de rédaction, par la maîtrise et la mise en place d'arguments analytiques difficiles et par la forte vision géométrique qui les soutient. Je recommande très chaleureusement la thèse pour soutenance.

Le 4 janvier 2023

Alexandru Oancea

Professeur des universités