

# LES INVARIANTS HOMOLOGIQUES PAR FAMILLES GÉNÉRATRICES DES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES

CYRIL FALCON

RÉSUMÉ. Les multiples aspects non-topologiques des symétries des variétés de contact font de la classification de leurs sous-variétés legendriennes une question véritablement riche et complexe qui est encore vastement ouverte. Dans ce dossier, nous illustrons la rigidité des isotopies legendriennes et nous adoptons la théorie de Morse-Bott-Cerf aux sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets enfin d'en construire des invariants homologiques. Ce document est une initiation aux recherches doctorales de son auteur dont les travaux consistent principalement à déterminer des résultats structuraux de ces invariants legendriens pour ensuite mieux en permettre le calcul et ainsi s'approcher de la classification des sous-variétés legendriennes.

## INTRODUCTION

Depuis septembre 2018, je travaille sous la direction de Frédéric Bourgeois au sein de l'équipe Topologie et Dynamique du Département de Mathématiques de l'Université Paris-Sud (UMR 8628, CNRS).

Mes recherches doctorales consistent à dégager des résultats structuraux pour les invariants homologiques des sous-variétés legendriennes qui sont construits par la technique des familles génératrices.

Ces travaux s'inscrivent dans le vaste problème de la classification à isotopie legendrienne près des sous-variétés legendriennes dans les variétés de contact. Cette question extrêmement naturelle se formule de la manière suivante :

**Question.** Quand deux sous-variétés legendriennes d'une variété de contact peuvent-elles être déformées l'une sur l'autre ?

Ce sujet conserve une saveur empruntée de la théorie des nœuds topologiques, bien que de véritables contraintes fortes sur les déformations autorisées soient nouvellement imposées par la structure de contact ambiante.

Les sous-variétés legendriennes sont de très grandes codimensions dans les variétés de contact, mais elles sont pourtant de nature profondément rigide. Elles ne peuvent pas toujours être séparées par une symétrie de la variété de contact ambiante, même si aucune obstruction topologique ne s'y oppose.

Ce comportement est surprenant, car de manière intuitive cela signifie que les sous-variétés legendriennes sont encombrantes bien qu'elles soient petites. C'est ce phénomène contradictoire qui fait de la classification des sous-variétés legendriennes un problème indéniablement riche et complexe.

Les familles génératrices sont au cœur de mon doctorat, car elles permettent d'envisager une approche plutôt élémentaire par la théorie de Morse-Bott-Cerf à la classification des sous-variétés legendriennes.

Ce texte d'initiation à mes thématiques de recherche se voulant généraliste, il débute sur une présentation sommaire des objets de la géométrie de contact <sup>1</sup>. J'évoque ensuite quelques phénomènes de rigidité des isotopies legendriennes afin de mieux motiver le développement des invariants par familles génératrices. Enfin, je m'efforce d'expliquer l'importance cruciale des résultats structuraux de ces invariants en expliquant comment ils permettent de s'affranchir des multiples difficultés techniques que leur calcul direct pose.

## 1. LA GÉOMÉTRIE ET LA TOPOLOGIE DE CONTACT

Forgeons-nous une intuition de la structure de contact standard  $\xi_0$  de  $\mathbb{R}^3$  en considérant un monocycle qui roule sans glisser sur un revêtement plan et cela en évitant toujours la direction Nord-Sud.

Nous encodons l'état mécanique du monocycle par un point  $(q, p, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , avec  $(q, z)$  qui repère sa position et  $p$  la pente de sa roue <sup>2</sup> dans le plan  $(q, z)$ . Ainsi, comme le monocycle ne peut que pivoter ou se déplacer dans la direction de sa roue, sa trajectoire est tangente au champ de plans de  $\mathbb{R}^3$  donné par :

$$\xi_0 = \ker(dz - pdq),$$

car cette distribution est engendrée par  $\partial_p = (0, 1, 0)$  et  $\partial_q + p\partial_z = (1, 0, p)$  qui traduisent les deux opérations élémentaires du contrôle du mouvement <sup>3</sup>. Autrement dit, la trajectoire  $t \mapsto (q(t), p(t), z(t))$  du monocycle satisfait :

$$\dot{z} - p\dot{q} = 0,$$

et son mouvement est régi par une équation différentielle linéaire d'ordre un <sup>4</sup>.

Nous remarquons aussi que le crochet de Lie de ces deux vecteurs est :

$$[\partial_p, \partial_q + p\partial_z] = \partial_z \lrcorner \xi_0,$$

alors, d'après un théorème classique de Georg Frobenius (1875, [16]), il n'existe pas de surface de  $\mathbb{R}^3$  qui soit partout tangente à la distribution de plans  $\xi_0$ , c'est la définition de la *non-intégrabilité* d'un champ de plans.

Dans le langage de la géométrie de contact, nous disons que la trajectoire du monocycle est une *courbe legendrienne* de la *variété de contact*  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  dont le champ de plans  $\xi_0$  est la *structure de contact*.

---

1. La géométrie différentielle élémentaire est néanmoins supposée être maîtrisée, voir [24]

2. La direction Nord-Sud étant proscrite, la pente  $p$  est correctement définie.

3. Nous anticipons en faisant remarquer que dans cette situation, nous avons identifié  $\mathbb{R}^3$  et l'espace de premiers jets de  $\mathbb{R}$ , ce qui justifie la notation adoptée pour ses coordonnées.

4. Malgré cette contrainte de mouvement, il existe toujours une trajectoire du monocycle joignant une paire de points donnée, il s'agit, par exemple, de l'approximation legendrienne.

La géométrie de contact intervient plus généralement dans tous les problèmes issus de la mécanique classique pour lesquels la vitesse du système est contrainte. Elle permet aussi de formuler le principe d'Huyghens de l'optique géométrique, ainsi que le premier principe de la thermodynamique.

Dans cette section, nous passons brièvement en revue les notions clefs de la géométrie de contact qui sont nécessaires à la bonne compréhension du texte. Nous invitons notre lecteur à consulter l'ouvrage [20] de Hansjörg Geiges pour les démonstrations des résultats énoncés et d'autres détails supplémentaires, puis l'article [19] du même auteur pour un historique de la géométrie de contact.

### 1.1. Les structures de contact.

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension impaire  $2n + 1$ .

**Définition.** Une *forme de contact* de  $M$  est une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$  de degré 1 qui satisfait la condition de non-dégénérescence  $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ .

Une forme de contact définit par dualité un unique champ de vecteurs.

**Définition.** Le *champ de Reeb* de  $\alpha$ , noté  $R_\alpha$ , est défini par les équations :

$$\alpha(R_\alpha) = 1, \quad d\alpha(R_\alpha, \cdot) \equiv 0.$$

Le champ  $R_\alpha$  est transverse au champ de noyaux de  $\alpha$  et dirige celui de  $d\alpha$ .

Une structure de contact de  $M$  est un champ d'hyperplans tangents à  $M$  qui minimise la dimension des sous-variétés de  $M$  qui lui sont partout tangentes, cette distribution est *maximalement non-intégrable*.

**Définition.** Une *structure de contact*  $\xi$  sur  $M$  est un champ d'hyperplans tangents à  $M$  qui est localement le noyau d'une forme de contact de  $M$ .

Une structure de contact étant non-intégrable, elle doit beaucoup tourner.

**Exemple.** Sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$  de coordonnées  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, z)$ , la 1-forme

$$\alpha_0 = dz - \sum_{k=1}^n p_k dq_k$$

est une forme de contact dont le champ de Reeb est donné par  $\partial_z = (0, \dots, 0, 1)$ .

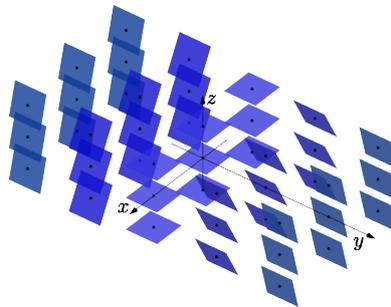


FIGURE. La structure de contact  $\xi_0 = \ker(dz - pdq)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Le noyau  $\xi_0$  de  $\alpha_0$  est la *structure de contact standard* de la variété  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

### 1.2. Les sous-variétés legendriennes.

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact de dimension  $2n + 1$ .

**Définition.** Une sous-variété  $\Lambda$  de  $M$  de dimension  $n$  est *legendrienne* quand elle est partout tangente aux hyperplans de  $\xi$ , c'est-à-dire que  $T\Lambda \subset \xi$ .

Les sous-variétés legendriennes sont en tension avec les structures de contact, car elles sont de dimension maximale pour la propriété de tangence ci-dessus. Cette tension ne les empêche pourtant pas d'être extrêmement abondantes.

**Théorème** (M. Gromov, 1986, [23]). Une sous-variété de  $M$  de dimension  $n$  est approximable en topologie  $C^0$  par des sous-variétés legendriennes de  $(M, \xi)$ .

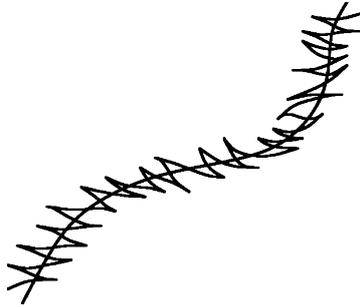


FIGURE. L'approximation legendrienne dans  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  vue dans  $y = 0$ .

Nous fixons maintenant une forme de contact  $\alpha$  pour la structure de contact  $\xi$ , ce qui revient d'ailleurs à supposer que le fibré vectoriel  $TM/\xi$  est trivialisable<sup>5</sup>. Nous introduisons maintenant ce qui formera les générateurs des invariants homologiques d'isotopie legendrienne annoncés dans l'introduction.

**Définition.** Une *corde de Reeb* d'une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  de  $(M, \alpha)$  est une trajectoire non-constante du champ  $R_\alpha$  qui débute et aboutit sur  $\Lambda$ .

Cette définition est motivée par l'étude de la dynamique du champ de Reeb, voir les articles [29] d'Alan Weinstein et [28] de Clifford Taubes.

### 1.3. La tautologie de contact.

Soient  $X$  une variété différentielle et  $\pi: T^*X \rightarrow X$  son fibré cotangent.

**Définition.** La *forme de Liouville* de  $T^*X$  est la 1-forme de  $T^*X$  définie par :

$$\lambda(p)(v) = p(T_p\pi(v)),$$

où  $p$  est un élément de  $T^*X$  et  $v$  est un élément de  $T_pT^*X$ .

**Exemple.** La forme de Liouville de  $T^*\mathbb{R}^n$  est  $\sum_{k=1}^n p_k dq_k$ .

L'*espace de premiers jets* de  $X$  est défini de la manière suivante :

$$J^1X = T^*X \times \mathbb{R}_z,$$

il est muni de la forme de contact  $dz - \lambda$  dont le champ de Reeb est  $\partial_z$ .

<sup>5</sup>. Il s'agit du lemme 1.1.1 dans le livre [20] de Hansjörg Geiges.

**Définition.** La *projection frontale*  $\pi_{xz}: J^1X \rightarrow X \times \mathbb{R}$  de  $J^1X$  est définie par :

$$\forall (p, z) \in T^*X \times \mathbb{R}, \pi_{xz}(p, z) = (\pi(p), z).$$

Le *front* d'une sous-variété legendrienne de  $J^1X$  est son image par  $\pi_{xz}$ .

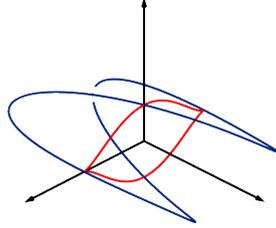


FIGURE. Un nœud legendrien de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  et sa projection frontale.

Une sous-variété legendrienne est déterminée par son front, car  $y_i = \frac{\partial x_i}{\partial z}$ .

Ces espaces jouent un rôle important en géométrie de contact, car ils modèlent toutes les variétés de contact au voisinage de leurs sous-variétés legendriennes.

**Théorème.** Soit  $\Lambda$  une sous-variété legendrienne de  $(M, \xi)$ , alors il existe un voisinage  $U$  de  $\Lambda$  dans  $M$ , un voisinage  $V$  de la section nulle de  $J^1\Lambda$  dans  $J^1\Lambda$ , ainsi qu'un difféomorphisme  $\psi: U \rightarrow V$  satisfaisant  $T\psi(\xi) = \xi_0$ .

Les structures de contact et les sous-variétés legendriennes sont définies par des conditions *locales*, mais pourtant l'essentiel de leur comportement est global. C'est pourquoi nous parlons aussi bien de *géométrie* ou de *topologie* de contact. La thèse [2] de Daniel Bennequin a marqué le début de la recherche des liens qu'entretiennent la géométrie de contact et la topologie classique.

## 2. LA CLASSIFICATION DES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES

Une grande majorité des recherches actuelles en géométrie de contact consiste à trouver la frontière entre *flexibilité* et *rigidité*<sup>6</sup> de ses objets d'études ([3], [11]). La classification des sous-variétés legendriennes s'inscrit notablement dans cet axe d'investigation et les techniques étudiées dans mon doctorat tendent tout particulièrement à donner des informations sur leur rigidité.

### 2.1. Les isotopies legendriennes.

Une *isotopie legendrienne* est une déformation d'une sous-variété legendrienne, il s'agit formellement d'un chemin lisse de sous-variétés legendriennes.

Un raffinement d'un théorème classique de topologie différentielle assure alors que toutes les isotopies legendriennes proviennent des *isotopies de contact*, qui sont les symétries globales à un paramètre de la variété de contact ambiante<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>. Les problèmes *flexibles* sont entièrement gouvernés par de la topologie algébrique et nous pouvons ainsi les résoudre en nous abstrayant complètement de la structure de contact, alors que toutes les autres situations sont dites *rigides*.

<sup>7</sup>. L'énoncé précis est celui du théorème 2.6.2 du livre [20] de Hansjörg Geiges.

## 2.2. La rigidité des isotopies legendriennes.

La topologie classique échoue complètement à décrire les classes d'isotopie legendrienne puisqu'une isotopie lisse, entre deux sous-variétés legendriennes, ne suffit pas à garantir l'existence d'une isotopie legendrienne entre elles.

**Théorème.** Une classe d'isotopie lisse d'une sous-variétés legendrienne se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes.

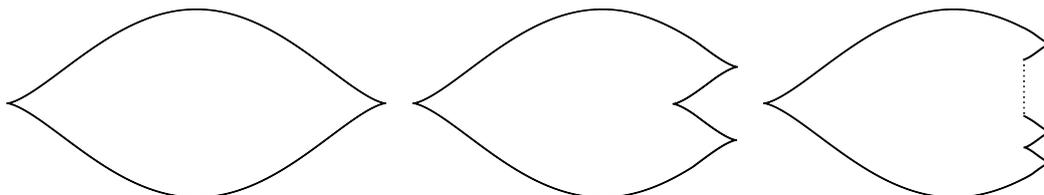


FIGURE. Les fronts d'une infinité de cercles lissements isotopes, mais pas legendriennement isotopes dans  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$ .

Le comportement des isotopies legendriennes est hautement non-topologique et il est nécessaire de développer de nouvelles techniques pour les appréhender. Les outils classiques des topologies algébrique et différentielle ne suffisent plus !

## 2.3. Les invariants classiques.

Une des approches systématique pour les problèmes de classification consiste à construire des invariants algébriques calculables qui permettent de distinguer, au moins partiellement, les différentes classes d'équivalence.

Les *nombre de rotation* et de *Thurston-Bennequin* des *nœuds legendriens*<sup>8</sup> sont des exemples de tels invariants pour les classes d'isotopie legendrienne. Nous renvoyons à l'article [2] de Daniel Bennequin pour leur étude poussée.

Nous orientons les nœuds legendriens de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  en fixant une orientation de  $S^1$  et nous donnons maintenant une définition combinatoire de ces invariants.

**Définition.** Le *nombre de rotation* d'un nœud legendrien  $L$  est

$$r(L) = \frac{1}{2}(D - M),$$

où  $D$ , respectivement  $M$ , désigne le nombre de rebroussement descendants, respectivement montants, de son front legendrien.

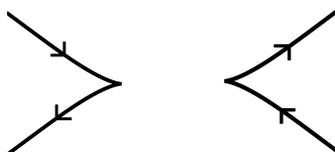


FIGURE. Un rebroussement descendant et un autre montant.

8. Un *nœud legendrien* est un plongement legendrien de  $S^1$  dans  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$ .

**Définition.** Le nombre de Thurston-Bennequin d'un nœud legendrien  $L$  est

$$\text{tb}(L) = C_+ - C_- - \frac{1}{2}(D + M),$$

avec  $C_{\pm}$  le nombre de croisements positifs/négatifs de son front legendrien.

Nous pouvons toujours appliquer une isotopie legendrienne au nœud  $L$  pour s'assurer que les points de son front soient au plus doubles.

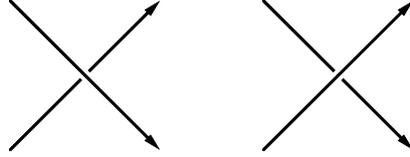


FIGURE 1. FIGURE. Un croisement positif et un autre négatif.

Soit  $L$  un nœud legendrien, nous notons  $L_{\pm}$  le nœud legendrien dont le front est obtenu en remplaçant un segment lisse et sans croisement du front de  $L$  par un zigzag de rebroussements montants ou descendants<sup>9</sup>.

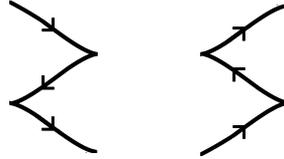


FIGURE. Les zigzags de rebroussements montants et descendants.

Les nœuds legendriens  $L_+$  et  $L_-$  sont encore dans la classe d'isotopie lisse de  $L$ , mais les classes d'isotopie legendrienne de  $L$ ,  $L_+$  et  $L_-$  sont distinctes<sup>10</sup>, car :

$$\begin{aligned} r(L_{\pm}) &= r(L) \pm 1, \\ \text{tb}(L_{\pm}) &= \text{tb}(L) - 1, \end{aligned}$$

ce qui établit le théorème de rigidité pour les nœuds legendriens.

**Exemple.** Il existe un nœud legendrien trivial avec  $r = 0$  et  $\text{tb} = -1$ .

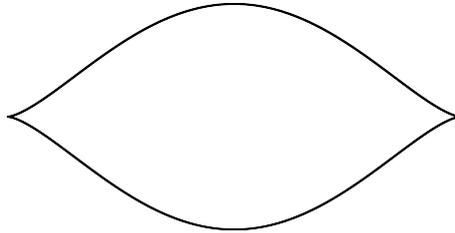


FIGURE. Le front d'un nœud legendrien trivial de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$ .

Ce nombre de Thurston-Bennequin est maximal pour les nœuds triviaux ([2]).

9. Ces opérations sont appelées *stabilisation positive* et *stabilisation négative*.

10. Seules les stabilisations modifient la classe d'isotopie lisse d'un nœud legendrien tout en préservant sa classe d'isotopie lisse, voir l'article [18] de Dmitry Fuchs et Serge Tabachnikov.

**Exemple.** Il existe un nœud de trèfle legendrien avec  $r = 0$  et  $tb = 1$ .

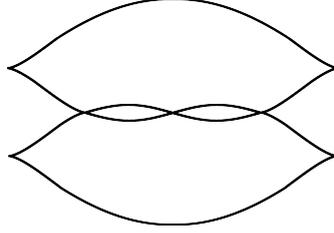


FIGURE. Le front d'un nœud de trèfle trivial de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$ .

Ce nombre de Thurston-Bennequin est maximal pour les nœuds de trèfles ([2]). Ces deux invariants permettent de classer les nœuds legendriens triviaux.

**Théorème** (Y. Eliashberg, M. Fraser, 2009, [14]). Le nombre de rotation et le nombre de Thurston-Bennequin déterminent entièrement les classes d'isotopie legendrienne des nœuds legendriens topologiquement triviaux de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$ .

Un résultat analogue pour les nœuds toriques<sup>11</sup> et pour les nœuds en huit est démontré dans l'article [15] de John Etnyre et Ko Honda.

Cependant, le couple de ces deux invariants ne caractérise pas toutes les classes d'isotopie legendrienne des nœuds legendriens quelconques de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$ .

**Théorème** (Y. Chekanov, 2002, [10]). Il existe des nœuds legendriens de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  qui sont lissement isotopes et ont les mêmes nombres de rotation et de Thurston-Bennequin sans pour autant être legendriennement isotopes.

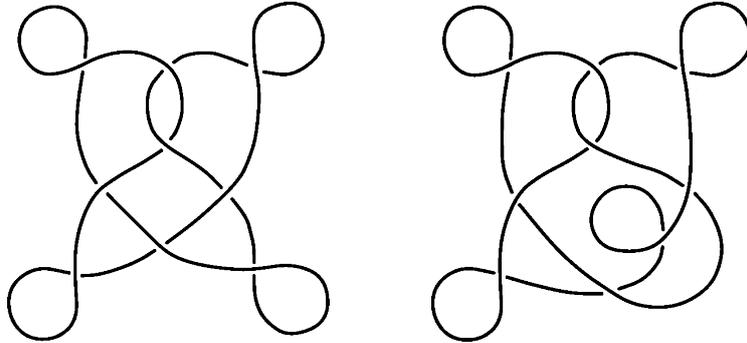


FIGURE. Des nœuds legendriens de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  satisfaisant le théorème.

Les nombres de rotation et de Thurston-Bennequin se généralisent à  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , voir l'article [12] des auteurs Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan, mais ces invariants restent quand même très limités.

**Théorème** (T. Ekholm, J. Etnyre, M. Sullivan, 2005, [12]). Quel que soit  $n > 1$ , il existe une infinité de sphères legendriennes de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ayant les mêmes nombres de rotation et de Thurston-Bennequin sans être legendriennement isotopes.

<sup>11</sup> Il faut en plus supposer qu'ils ont le même type.

Ces théorèmes indiquent que la classification des sous-variétés legendriennes est un problème extrêmement riche que nous sommes encore loin d'avoir résolu. En fait, nous n'avons même, actuellement, aucune conjecture de classification, et c'est pourquoi il est crucial de développer de nouvelles techniques pour mieux explorer la rigidité des sous-variétés legendriennes.

### 3. LES INVARIANTS HOMOLOGIQUES PAR FAMILLES GÉNÉRATRICES

La classification des sous-variétés legendriennes étant un problème complexe, il est déraisonnable de s'y attaquer dans des variétés de contact générales. C'est pourquoi nous restreignons notre étude aux sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets et notre problème est alors celui de la classification locale des sous-variétés legendriennes des variétés de contact générales.

Nous développons des techniques inspirées de la théorie de Morse-Bott-Cerf dont les ouvrages de référence sont [25] de John Milnor, [1] de Michèle Audin et Mihai Damian, [4] de Raoul Bott et [7] de Jean Cerf.

Soit  $X$  une variété différentielle de dimension  $n$ .

#### 3.1. Les familles génératrices des sous-variétés legendriennes.

Nous pouvons décrire certaines sous-variétés legendriennes de  $J^1X$  à partir des points et valeurs critiques d'une famille lisse de fonctions  $(f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R})_{x \in X}$ , cela correspond à la notion de *famille génératrice*, voir [8] de Marc Chaperon.

Nous notons  $x$  les coordonnées de  $X$  et  $v$  celles de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^N$ .

**Définition.** Une fonction lisse  $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est une *famille génératrice* lorsque  $\mathbf{0} \in (\mathbb{R}^N)^*$  est une valeur régulière de  $\partial_v f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$ .

Si  $f$  est une famille génératrice, alors l'ensemble suivant :

$$\Lambda_f = \{(x, \partial_x f(x, v), f(x, v)) \mid (x, v) \in X \times \mathbb{R}^N; \partial_v f(x, v) = 0\}$$

est automatiquement une sous-variété legendrienne immergée<sup>12</sup> de  $J^1X$ .

Une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  admet une famille génératrice  $f$  quand  $\Lambda = \Lambda_f$ .

**Remarque.** Une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  admet une famille génératrice  $f$  si, et seulement, si son front est le *diagramme de Cerf* de  $(f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R})_{x \in X}$  qui est l'ensemble des  $(x, f_x(v))$ , où  $x \in X$  et  $v$  est un point critique de  $f_x$ .

**Remarque.** Soit  $f$  une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne  $\Lambda$ , alors les points de rebroussement du front de  $\Lambda$  correspondent aux naissances et morts d'un point critique dans la famille  $x \mapsto f_x$ .

**Remarque.** Soit  $f$  une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne  $\Lambda$ , alors les croisements du front de  $\Lambda$  correspondent aux points critiques de  $f_x$  dont l'ordre des valeurs critiques s'inverse.

<sup>12</sup> Quel que soit  $\alpha$  une forme différentielle de degré 1 de  $X$ , nous avons  $\alpha^* \lambda = \alpha$ .

**Exemple.** L'application  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la manière suivante :

$$f(x, v) = v^3 - 3x(1-x)v$$

est une famille génératrice d'un nœud legendrien trivial de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$ .

Nous représentons dans la figure suivante la famille génératrice  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ainsi que le front du nœud legendrien qu'elle engendre.

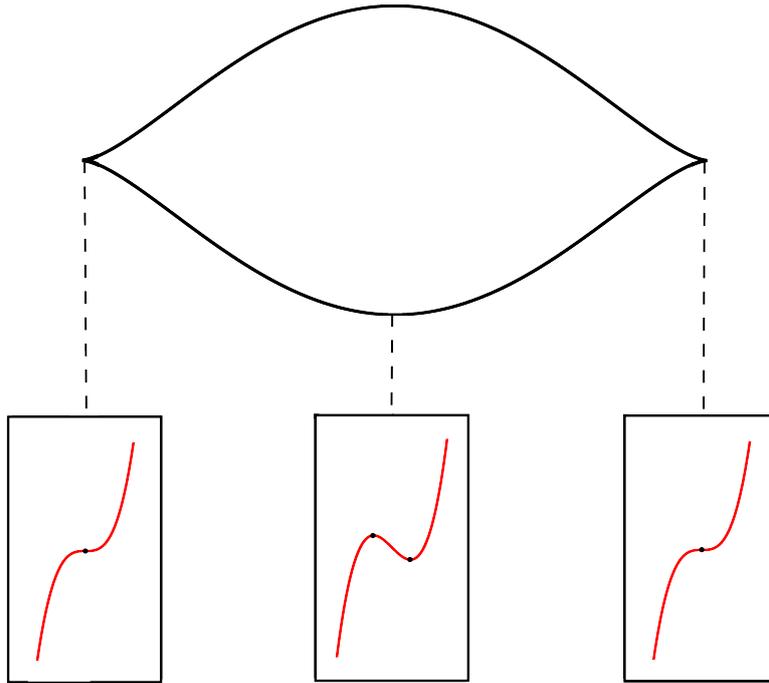


FIGURE. La famille génératrice  $f$  et son diagramme de Cerf.

**Exemple.** L'application  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la manière suivante :

$$g(x, v) = v^4 - v^2 + xv$$

est une famille génératrice de la queue d'aronde.

Nous commençons par représenter le front de la queue d'aronde.

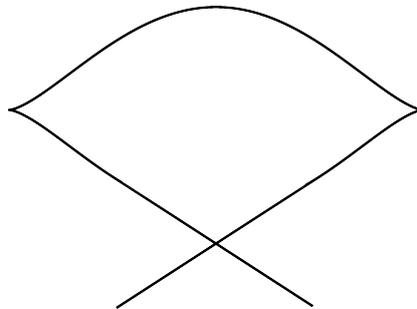


FIGURE. Le front de la queue d'aronde.

Le *mouvement de Reidemeister I* est l'opération qui consiste à remplacer un segment du front d'une courbe legendrienne par celui de la queue d'aronde. Mentionnons que cette opération est obtenue par isotopie legendrienne et qu'une démonstration complète est dans l'article [27] de Jacek Swiatkowski. Nous y trouverons aussi les définitions des mouvements de Reidemeister II et III, ainsi que des informations complémentaires sur ces trois opérations.

Nous représentons dans la figure suivante la famille génératrice  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ainsi que le front de la courbe legendrienne qu'elle engendre.

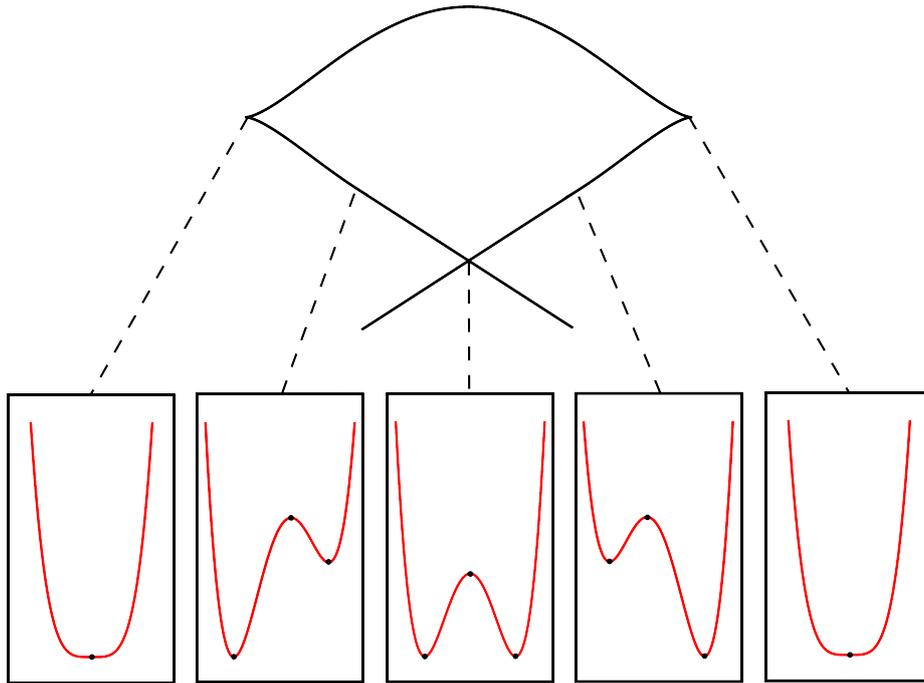
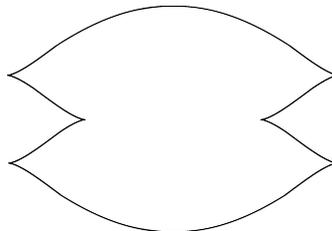


FIGURE. La famille génératrice  $g$  et son diagramme de Cerf.

Certaines sous-variétés legendriennes n'admettent pas de famille génératrice, comme celles dont le nombre de rotation est non nul ou dont le front zigzague<sup>13</sup>. D'autres obstructions sont dégagées par Emmanuel Giroux dans l'article [21].

**Exemple.** Le nœud legendrien de  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  dont le front est le suivant :



n'admet pas de famille génératrice, mais son nombre de rotation est nul.

<sup>13</sup>. Ce sont des conséquences faciles d'un résultat de théorie de Cerf qui affirme qu'au voisinage d'une naissance/mort, il existe deux points critiques d'indices consécutifs.

Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne en induit une infinité d'autres par compositions par des *difféomorphismes fibrés* ou par *stabilisations*. Les familles génératrices ainsi obtenues sont déclarées *équivalentes*.

**Définition.** Un *difféomorphisme fibré* est un difféomorphisme de  $X \times \mathbb{R}^N$  qui préserve globalement tous les niveaux verticaux  $\{x\} \times \mathbb{R}^N$ ,  $x \in X$ .

La précomposition d'une famille génératrice par un difféomorphisme fibré est une famille génératrice dont les points critiques ont été permutés fibre à fibre.

**Définition.** Une *stabilisation* d'une famille génératrice  $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $f \oplus Q: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f \oplus Q(x, v, v') = f(x, v) + Q(v'),$$

où  $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme quadratique non-dégénérée.

La stabilisation d'une famille génératrice consiste à rajouter des dimensions dans les fibres de son domaine, le long desquelles elle varie quadratiquement.

Nous énonçons un théorème qui justifie à lui seul la pertinence des familles génératrices dans le problème de classification des sous-variétés legendriennes.

**Théorème** (Y. Chekanov, 1996, [9]). L'existence d'une famille génératrice persiste aux isotopies legendriennes et sa classe d'équivalence est préservée.

Il s'agit d'un résultat extrêmement complexe à établir.

### 3.2. L'homologie pour les familles génératrices.

La construction de l'homologie pour les familles génératrices est grandement détaillée dans l'article [26] de Joshua Sabloff et Lisa Traynor.

Soit  $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  une famille génératrice de  $\Lambda$  connexe.

**Définition.** La *fonction différence*  $\delta: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  est définie par :

$$\delta(x, v_1, v_2) = f(x, v_1) - f(x, v_2).$$

Quel que soit  $a \in \mathbb{R}$ , nous notons  $\delta^a$  le sous-niveau  $\delta^{-1}(]-\infty, a])$ .

Nous faisons maintenant une observation qui motive la construction d'une homologie à la Morse-Bott-Cerf pour les familles génératrices.

**Proposition.** Les points critiques de  $\delta$  dont la valeur critique est strictement positive sont en correspondance bijective avec les cordes de Reeb de  $\Lambda$ .

Une majeure partie des résultats en homologie de Morse repose inévitablement sur la compacité des sous-niveaux des fonctions de Morse que l'on considère. Or, le domaine des fonctions différences n'est jamais compact, c'est ce qui nous contraint d'imposer le comportement à l'infini des familles génératrices.

**Définition.** Une famille génératrice  $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est *linéaire à l'infini* lorsqu'il existe une forme linéaire non nulle  $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(x, v) = A(v),$$

pour tous les points  $(x, v)$  en dehors d'un compact de  $X \times \mathbb{R}^N$ .

Nous supposons désormais que la famille génératrice  $f$  est linéaire à l'infini et nous choisissons aussi des réels  $\omega > \varepsilon > 0$  tels que les valeurs critiques strictement positives de  $\delta$  soient strictement comprises entre  $\varepsilon$  et  $\omega$ .

**Définition.** L'homologie pour les familles génératrices de  $f$  est définie par :

$$HG_k(f) = H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

La cohomologie pour les familles génératrices est définie de manière similaire. Ces modules gradués ne dépendent que de la classe d'équivalence de  $f$ .

**Remarque.** L'invariance par stabilisation de l'homologie pour les familles génératrices est assurée par le choix de sa graduation.

Il est souvent fructueux d'utiliser que l'homologie pour les familles génératrices provient du complexe de chaînes engendré par les points critiques de valeurs critiques strictement positives de la fonction différence<sup>14</sup> avec la graduation :

$$|p| = \text{ind}_p(\delta) - N - 1,$$

et dont l'application de bord est la différentielle de Morse usuelle<sup>15</sup>.

**Remarque.** La graduation de  $p = (x, v_1, v_2)$  se calcule aussi comme suit :

$$|p| = (\text{ind}_{v_1}(f_x) - \text{ind}_{v_2}(f_x)) + \text{ind}_x \delta_{(v_1, v_2)} - 1,$$

ce qui permet de calculer directement la graduation sur les fronts legendriens.

**Définition.** Le polynôme de Poincaré de la famille génératrice  $f$  est :

$$\Gamma_f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(HG_k(f)) t^k,$$

c'est un polynôme de Laurent à coefficients dans les entiers naturels.

**Exemple.** Nous calculons l'homologie de  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, v) = v^3 - 3x(1-x)v.$$

Le nœud legendrien qui est engendré par  $f$  possède une unique corde de Reeb, donc la fonction différence de  $f$  possède un unique point critique qui se trouve être de graduation égale à 1, car c'est un maximum.

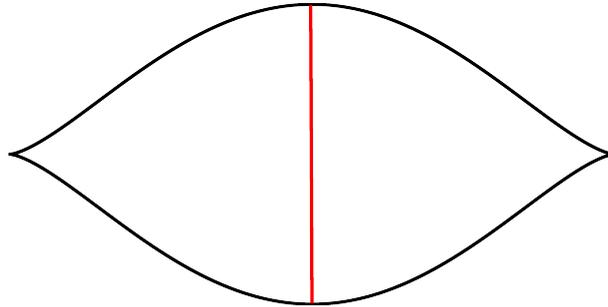


FIGURE. La corde de Reeb du nœud legendrien engendré par  $f$ .

Le polynôme de Poincaré de  $f$  est  $\Gamma_f(t) = t$ .

14. Une petite perturbation de  $f$  suffit à garantir qu'ils sont tous non-dégénérés.

15. Elle compte les lignes d'un gradient de  $-\delta$  entre ses points critiques d'indices successifs.

**Exemple.** Soit  $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , il existe<sup>16</sup> une famille génératrice  $f_a$  pour un entrelacs de Hopf dont les points critiques fibrés sont d'indice 0, 1,  $a$  et  $a + 1$ .

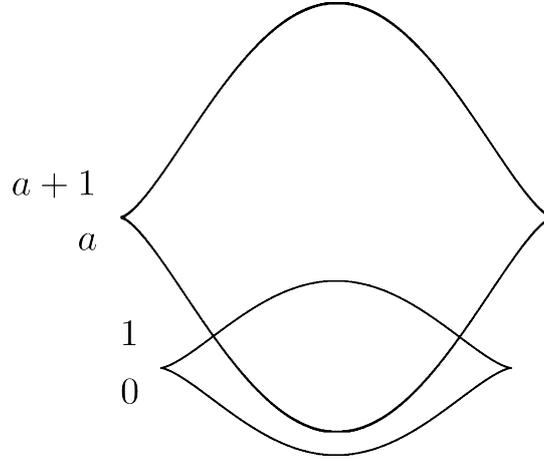


FIGURE. Le front d'un entrelacs de Hopf legendrien.

La fonction différence  $\delta_a$  de  $f_a$  possède six points critiques, car l'entrelacs qu'elle engendre a six cordes de Reeb  $c_1, c_2, c_{12}, c_{21}, c_m$  et  $c_M$ .

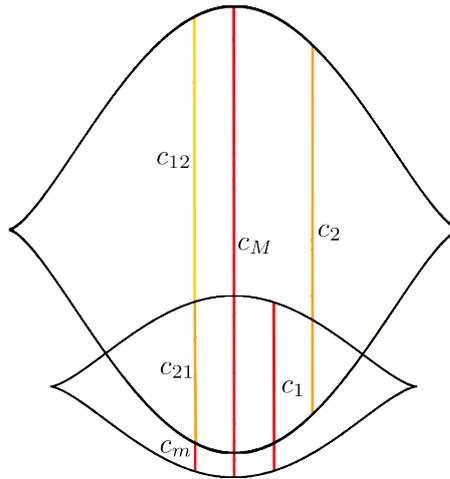


FIGURE. Les cordes de Reeb (desaxées) d'un entrelacs de Hopf.

Nous calculons la graduation de ces points critiques en exploitant la formule qui fait intervenir les indices des points critiques fibrés d'une famille génératrice. Les graduations sont listées ci-dessous par valeur critique décroissante :

$p$	$c_M$	$c_2$	$c_{12}$	$c_1$	$c_{21}$	$c_m$
$ p $	$a + 1$	1	$a$	1	$1 - a$	$a - 1$

Les graduations des cordes  $c_1, c_2$  et  $c_{21}$  ne sont consécutives à aucune autre<sup>17</sup> et leurs classes sont des générateurs de l'homologie de la famille génératrice  $f_a$ .

16. La construction est vraiment élémentaire, voir le lemme 6.8 de [6].

17. Pour  $c \in \{c_1, c_2, c_{21}\}$ , il n'existe pas  $c' \in \{c_M, c_2, c_{12}, c_1, c_{21}, c_m\}$  tel que  $|c'| = |c| \pm 1$ .

Par contre, nous ne pouvons rien déduire de la contribution de  $c_M$ ,  $c_{12}$  et  $c_m$ , car il peut exister des lignes d'antigradient de  $\delta_a$  joignant  $c_M$  à  $c_{12}$  ou  $c_{12}$  à  $c_m$ . Ces lignes de gradient n'étant pas visibles sur le front de l'entrelacs de Hopf, cela rend, pour le moment, le calcul de  $\Gamma_{f_a}$  impossible...

Les familles génératrices permettent d'aborder le problème de classification des sous-variétés legendriennes, car le théorème de persistance des familles génératrices assure que pour tout  $0 \leq k \leq n$ , l'ensemble

$$\mathcal{HG}_k(\Lambda) = \{HG_k(f); f \text{ famille génératrice linéaire à l'infini de } \Lambda\}$$

est invariant par isotopie legendrienne.

### 3.3. La structure de l'homologie pour les familles génératrices.

La description des familles génératrices d'une sous-variété legendrienne donnée est souvent qualitative, ce qui compromet le calcul directeur de leur homologie<sup>18</sup>. Cependant, connaître la structure de l'homologie pour les familles génératrices permet de pallier cette limitation en offrant des méthodes de calcul détournées.

Nous écrivons une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie génératrice, la cohomologie correspondante et l'homologie de la sous-variété legendrienne. Elle généralise la dualité de Poincaré de l'homologie des variétés fermées.

**Théorème** (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [6]). Si  $\Lambda \subset J^1X$  est une sous-variété legendrienne connexe qui admet une famille génératrice  $f$  linéaire à l'infini, alors il existe une longue suite exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f) \rightarrow \cdots$$

De plus, les applications  $\tau_k$  satisfont deux propriétés supplémentaires :

1. Si  $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$  est l'isomorphisme de Poincaré, alors les applications  $\sigma_k \circ \alpha$  et  $\tau_{n-k}$  sont duales.
2. L'application  $\tau_n: HG_n(f) \rightarrow H_n(\Lambda)$  est surjective.

**Remarque.** Ce théorème assure que pour  $k \geq n+1$ ,  $\rho_k$  est un isomorphisme, donc les générateurs de  $HG_k(f)$  et  $HG^{n-k-1}(f)$  s'assemblent en *paires duales*.

**Théorème** (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [6]). Si  $\Lambda \subset J^1X$  est une sous-variété legendrienne connexe qui admet une famille génératrice  $f$  linéaire à l'infini, alors le polynôme de Poincaré de  $f$  est de la forme :

$$(\star) \quad \Gamma_f(t) = (q_0 + q_1t + \cdots + q_nt^n) + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1}),$$

où  $q_k + q_{n-k}$  est le  $k$ -ième nombre de Betti de  $\Lambda$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_n = 1$  et  $p$  satisfait :

$$p(t) = \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k,$$

avec tous les coefficients  $p_k$  qui sont des entiers naturels.

**Remarque.** En retirant  $q_0 = 0$  et  $q_n = 1$ , le résultat du théorème reste vrai pour des sous-variétés legendriennes qui ne sont pas nécessairement connexes.

18. Il est difficile de comprendre la topologie des sous-niveaux d'une fonction différence.

Nous illustrons dans l'exemple suivant comment ce résultat de dualité permet de calculer l'homologie pour les familles génératrices.

**Exemple.** Nous reprenons le calcul du polynôme de Poincaré de  $f_a$ ,  $a \neq 1$ , une famille génératrice pour un entrelacs de Hopf dont les indices des points critiques fibrés sont 0, 1,  $a$  et  $a + 1$ .

Par les calculs déjà effectués, nous savons qu'il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\Gamma_{f_a}(t) = 2t + t^{1-a} + \alpha t^{a-1} + \beta t^a + \gamma t^{a+1}.$$

Or, comme  $\Gamma_{f_a}$  est compatible avec  $(\star)$ , nous devons avoir  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ . Dès lors, nous savons que  $\partial c_M = c_{12}$ , ce que nous ignorions par analyse du front. Finalement, pour  $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , nous avons construit une famille génératrice d'un entrelacs de Hopf dont le polynôme de Poincaré est :

$$\Gamma_{f_a}(t) = 2t + t^{a-1} + t^{1-a}.$$

Par rotation du front, nous obtenons un entrelacs de Hopf de dimension  $n$  avec une famille génératrice dont le polynôme de Poincaré est  $2t^n + t^{a-1} + t^{n-1}t^{1-a}$ .

**Théorème** (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [6]). Si  $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$  est compatible avec  $(\star)$ , alors il existe une sous-variété legendrienne connexe admettant une famille génératrice  $f$  linéaire à l'infini telle que  $P(t) = \Gamma_f(t)$ .

Nous présentons finalement un exemple clef pour la réalisation des différentes valeurs admissibles de l'homologie pour les familles génératrices.

**Exemple.** Soit  $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , il existe une famille génératrice  $g_a$  pour un cercle legendrien dont les points critiques fibrés sont d'indices 0, 1,  $a$  et  $a + 1$ .

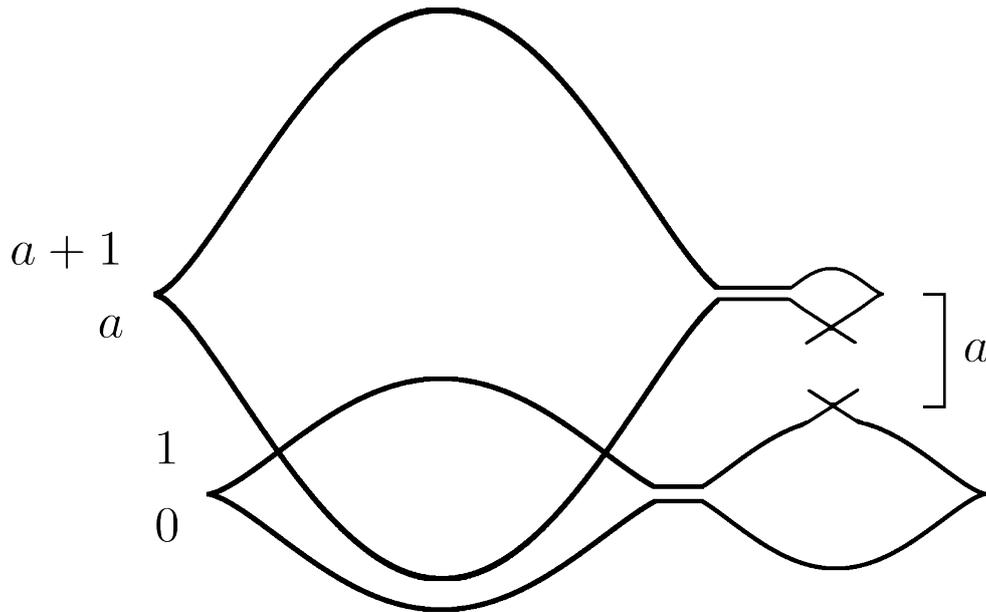


FIGURE. Un cercle obtenu par chirurgie sur un entrelacs de Hopf.

Cette famille génératrice est obtenu par somme connexe sur l'entrelacs de Hopf précédent auquel nous avons d'abord fait subir une isotopie legendrienne<sup>19</sup>. Finalement<sup>20</sup>, pour  $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , nous avons construit une famille génératrice pour un cercle legendrien dont le polynôme de Poincaré est :

$$\Gamma_{g_a}(t) = t + t^{a-1} + t^{1-a}.$$

Par rotation du front, nous obtenons une sphère de dimension  $n$  avec une famille génératrice dont le polynôme de Poincaré est  $t^n + t^{a-1} + t^{n-1}t^{1-a}$ .

**Remarque.** L'entrelacs de Hopf permet de réaliser par somme connexe toutes les *paires de dualité* de l'homologie pour les familles génératrices<sup>21</sup>.

Le théorème serait maintenant établi en réalisant toutes les *classes de variété* de l'homologie pour les familles génératrices<sup>22</sup>, voir le corollaire 6.7 de [6].

### PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Les familles génératrices n'ont pas le monopole des techniques permettant d'élaborer des invariants sophistiqués des sous-variétés legendriennes, certaines autres constructions reposent sur l'utilisation des *courbes pseudo-holomorphes*<sup>23</sup>, comme celle de l'homologie de contact legendrienne évoquée ci-après.

Soit  $\Lambda$  une sous-variété legendrienne, son *algèbre de Chekanov*, notée  $(A(\Lambda), \partial)$ , est une *algèbre différentielle graduée* qui est librement engendrée par les cordes de Reeb de  $\Lambda$  et dont la différentielle compte des courbes pseudo-holomorphes. Son homologie  $HCL_\bullet(\Lambda)$  est l'*homologie de contact legendrienne* de  $\Lambda$ .

L'homologie de contact legendrienne a été définie pour les nœuds legendriens dans l'article [10] de Yuri Chekanov et de manière générale dans l'article [13] de Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan.

La non-commutativité de l'algèbre de Chekanov fait de  $HCL_\bullet(\cdot)$  un invariant des sous-variétés legendriennes extrêmement fin, mais vraiment peu commode à calculer et à manipuler, car il est généralement de dimension infinie.

Cependant, ces difficultés et ces limitations sont toutes contournées par la construction de l'homologie de contact legendrienne *linéarisée*, notée  $HCL_\bullet^\varepsilon(\cdot)$ , où  $\varepsilon$  est une augmentation de l'algèbre de Chekanov<sup>24</sup>.

Cet invariant legendrien dépend de l'augmentation choisie pour linéariser.

19. Nous appliquons  $a$  mouvements de Reidemeister I au cercle inférieur de l'entrelacs.

20. Une isotopie legendrienne ne modifie pas l'homologie pour les familles génératrices, alors que la somme connexe en élimine une *classe fondamentale*, voir le lemme 6.3 de [6].

21. Les polynômes de Laurent  $t^n + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1})$  de  $(\star)$  sont tous réalisables.

22. Les polynômes  $t^n + q_{n-1}t^{n-1} + \dots + q_1t$  de  $(\star)$  sont tous réalisables.

23. Cette notion est due à Mikhaïl Gromov dans son article [22].

24. C'est un morphisme  $\varepsilon: (A(\Lambda), \partial) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0)$ .

Bien que les techniques de construction soient fondamentalement différentes, les invariants des sous-variétés legendriennes obtenus par familles génératrices et par courbes pseudo-holomorphes entretiennent tout de même des liens étroits.

**Théorème** (D. Fuchs, D. Rutherford, 2011, [17]). Si  $L$  est un nœud legendrien de la variété  $(\mathbb{R}^3, \xi_0)$  et que  $f$  est une famille génératrice linéaire à l'infini de  $L$ , alors il existe une augmentation de  $(A(L), \partial)$  telle que  $HG_\bullet(f) \cong HCL_\bullet^\varepsilon(L)$ .

Il est conjecture que cette équivalence persiste dans  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_0)$  avec  $n \geq 1$ , mais les techniques jusqu'ici développées ne permettent pas de s'en approcher.

La linéarisation de l'application de bord de l'algèbre de Chekanov produit un invariant legendrien calculable, mais casse toute sa structure multiplicative. C'est ce qui empêche l'homologie de contact legendrienne linéarisée de pouvoir distinguer efficacement les différentes *classes d'équivalence d'augmentations*<sup>25</sup> de l'algèbre de Chekanov.

Une solution est de définir une homologie de contact legendrienne *bilinéarisée* en considérant cette fois-ci une paire d'augmentations de l'algèbre de Chekanov. Cette construction permet de conserver la structure non-commutative sans pour autant rendre les calculs délicats, voir l'article [5] de Frédéric Bourgeois et Baptiste Chantraine.

L'homologie de contact legendrienne bilinéarisée distingue complètement les classes d'équivalence d'augmentations de l'algèbre de Chekanov.

**Théorème** (F. Bourgeois, en cours). Si  $\Lambda$  est une sous-variété legendrienne connexe et que  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont deux augmentations de  $(A(\Lambda), \partial)$ , alors  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont équivalentes si, et seulement, si  $HCL_n^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\Lambda) \neq 0$ .

La structure de l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée est aussi connue.

**Théorème** (F. Bourgeois, en cours). Si  $\Lambda$  est une sous-variété legendrienne connexe et que  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont deux augmentations non-équivalentes de  $(A(\Lambda), \partial)$ , alors le polynôme de Poincaré de  $HCL_\bullet^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\Lambda)$  est de la forme :

$$(*) \quad \Gamma_\Lambda^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t) = (1 + q_1 t + \dots + q_{n-1} t^{n-1}) + r(t),$$

avec  $r$  un polynôme de Laurent à coefficients entiers qui satisfait

$$r(-1) = \begin{cases} 0, & \text{si } \dim(\Lambda) \text{ est pair,} \\ \text{pair,} & \text{si } \dim(\Lambda) \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cette contrainte sur  $r(-1)$  provient du nombre de Thurston-Bennequin de  $\Lambda$ .

De plus, une réciproque partielle de ce résultat est satisfaite.

**Théorème** (F. Bourgeois, en cours). Si  $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$  satisfait (\*), alors il existe un  $N \geq 0$  tel que pour  $c \geq N$ , il existe  $\Lambda$  une sous-variété legendrienne connexe et  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  deux augmentations non-équivalentes de  $(A(\Lambda), \partial)$  telles que :

$$P(t) + c(1 + t^{n-1}) = \Gamma_\Lambda^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t).$$

<sup>25</sup>. Cette notion d'équivalence des augmentations est la définition 2.12 de [5].

Il est même conjecturé que  $N = 0$ , de sorte que la seule contrainte structure de l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée soit contenue dans (\*).

Du côté de la théorie de Morse-Bott-Cerf, l'homologie pour les familles génératrices ne permet pas de distinguer complètement les classes d'équivalence de familles génératrices linéaires à l'infini<sup>26</sup>.

Une nouvelle fois, il va s'agir de raffiner l'invariant de départ en le bilinéarisant, il s'agit ici de considérer une paire de familles génératrices linéaires à l'infini. Si  $(f_1, f_2)$  est une paire de familles génératrices linéaires à l'infini d'une même sous-variété legendrienne, nous introduisons sa fonction différence définie par :

$$\delta_{f_1, f_2}(x, v_1, v_2) = f(x, v_1) - f(x, v_2).$$

Une construction analogue au cas d'une famille génératrice fournit  $HG_\bullet(f_1, f_2)$ , appelée *homologie pour les paires de familles génératrices* de  $(f_1, f_2)$ .

Il existe encore une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie pour les paires de familles génératrices, la cohomologie correspondante et l'homologie singulière de la sous-variété legendrienne.

**Théorème.** Si  $\Lambda$  est une sous-variété legendrienne connexe ayant des familles génératrices  $f_1$  et  $f_2$  linéaires à l'infini, alors nous avons la longue suite exacte :

$$\dots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f_2, f_1) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f_1, f_2) \rightarrow \dots$$

Si  $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$  est la dualité de Poincaré,  $\sigma_k \circ \alpha$  et  $\tau_{n-k}$  sont duales.

Cependant, cette dualité ne permet pas de dégager des contraintes structurales sur l'homologie pour les paires de génératrices, car c'est la cohomologie de la paire  $(f_2, f_1)$  qui intervient et non celle de  $(f_1, f_2)$ .

Par ailleurs, la surjectivité de  $\tau_n: HG_n(f_1, f_2) \rightarrow HG_n(\Lambda)$  n'est plus garantie, mais c'est néanmoins le cas quand  $f_1$  et  $f_2$  sont équivalentes, car nous avons :

$$HG_\bullet(f_1, f_2) \cong HG_\bullet(f_1) \cong HG_\bullet(f_2).$$

En faisant un parallèle avec l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée, nous conjecturons que c'est aussi une condition nécessaire.

**Conjecture.** Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux familles génératrices linéaires à l'infini de  $\Lambda$ , alors elles sont équivalentes si, et seulement, si  $HG_n(f_1, f_2) \neq 0$ .

L'homologie pour les paires de familles génératrices permettrait de déterminer systématiquement si deux familles génératrices sont équivalentes ou non.

Si nous exhibons des contre-exemples à cette conjecture, cela pourrait nous amener à généraliser la notions d'équivalence des familles génératrices qui est sûrement encore trop restrictive en l'état<sup>27</sup>.

26. La situation est analogue à la classification des augmentations de l'algèbre de Chekanov par l'homologie de contact legendrienne linéarisée

27. Les stabilisations ne dépendent pas des fibres comme les difféomorphismes fibrés.

Mes recherches s’inscrivent dans la volonté de rapprocher les invariants des sous-variétés legendriennes qui sont obtenus par familles génératrices de ceux qui sont déduits des courbes pseudo-holomorphes.

J’envisage de transposer à l’homologie pour les paires de familles génératrice, certains résultats structuraux que Frédéric Bourgeois prépare actuellement pour l’homologie de contact legendrienne bilinéarisée.

Il s’agit alors de généraliser les techniques de l’article [6] de Frédéric Bourgeois, Joshua Sabloff et Lisa Traynor aux paires de familles génératrices.

Concrètement, j’espère que sur le long terme, ces travaux permettront de mieux comprendre les interactions entre les familles génératrices et les augmentations des algèbres de Chekanov des sous-variétés legendriennes.

La résolution de ce vaste problème doit d’abord passer par l’étude d’exemples et des calculs complets d’homologie pour les paires de familles génératrices.

Dans un premier temps, je souhaite forger mon intuition en montrant que le <sup>28</sup> nœud de trèfle legendrien qui satisfaisait  $(r, tb) = (0, 1)$  admet cinq <sup>29</sup> familles génératrices linéaires à l’infini qui ne sont pas équivalentes <sup>30</sup>.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Audin and M. Damian. *Théorie de Morse et Homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.
- [2] D. Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. *Astérisque*, 107–108 :87–161, 1983.
- [3] M. Borman, Y. Eliashberg, and Emmy Murphy. Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions. *Acta Mathematica*, 215(2) :281–361, 2015.
- [4] R. Bott. Lectures on Morse theory, old and new. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(2) :331–358, 1982.
- [5] F. Bourgeois and B. Chantraine. Bilinearised Legendrian contact homology and the augmentation category. *Journal of Symplectic Geometry*, 12(3) :553–583, 2014.
- [6] F. Bourgeois, J. Sabloff, and L. Traynor. Lagrangian cobordisms via generating families : Construction and geography. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(4) :2439–2477, 2015.
- [7] J. Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théoreme de la pseudo-isotopie. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 39(1) :7–170, 1970.
- [8] M. Chaperon. On generating families. In H. Hofer, C. Taubes, A. Weinstein, and E. Zehnder, editors, *The Floer Memorial Volume*, volume 133 of *Progress in Mathematics*, pages 283–296. Birkhäuser Basel, 1995.
- [9] Y. Chekanov. Critical points of quasifunctions and generating families of Legendrian manifolds. *Functional Analysis and Its Applications*, 30(2) :118–128, 1996.

---

<sup>28</sup>. Le nœud de trèfle étant torique, de type  $(2, 3)$ , sa classe d’isotopie legendrienne est entièrement déterminée par ses nombres de rotation et de Thurston-Bennequin ([15]).

<sup>29</sup>. Son algèbre de Chekanov possède cinq augmentations non-équivalentes ([5]).

<sup>30</sup>. Cela nécessitera de calculer leur homologie et l’homologie des paires qu’elles forment.

- [10] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Inventiones mathematicae*, 150 :441–483, 2002.
- [11] S.-F. Chiu. Nonsqueezing property of contact balls. *Duke Mathematical Journal*, 166(4) :605–655, 2017.
- [12] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. Non-isotopic Legendrian submanifolds in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . *Journal of Differential Geometry*, 71(1) :85–128, 2005.
- [13] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. The contact homology of Legendrian submanifolds in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . *Journal of Differential Geometry*, 71(2) :177–305, 2005.
- [14] Y. Eliashberg and M. Fraser. Topologically trivial Legendrian knots. *Journal of Symplectic Geometry*, 7(2) :77–127, 2009.
- [15] J. Etnyre and K. Honda. Knots and Contact Geometry I : Torus Knots and the Figure Eight Knot. *Journal of Symplectic Geometry*, 1(1) :63–120, 2001.
- [16] G. Frobenius. Ueber das Pfaffsche Problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 87 :230–315, 1877.
- [17] D. Fuchs and D. Rutherford. Generating families and legendrian contact homology in the standard contact space. *Journal of Topology*, 4 :190–226, 2011.
- [18] D. Fuchs and S. Tabachnikov. Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space. *Topology*, 36(5) :1025–1053, 1997.
- [19] H. Geiges. A brief history of contact geometry and topology. *Expositiones Mathematicae*, 19(1) :25–53, 2001.
- [20] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [21] E. Giroux. Formes génératrices d’immersions lagrangiennes. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences de Paris, Série I*, 306(18) :761–764, 1988.
- [22] M. Gromov. Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 82 :307–347, 1985.
- [23] M. Gromov. *Partial Differential Relations*. Springer, 1986.
- [24] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.
- [25] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [26] J. Sabloff and L. Traynor. Obstructions to Lagrangian cobordisms between Legendrians via generating family. *Algebraic & Geometric Topology*, 13(5) :2733–2797, 2013.
- [27] J. Swiatkowski. On the isotopy of Legendrian knots. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 10(3) :195–207, 1992.
- [28] C. Taubes. The Seiberg–Witten equations and the Weinstein conjecture. *Geometry & Topology*, 11(4) :2117–2202, 2007.
- [29] A. Weinstein. On the hypotheses of Rabinowitz’s orbit theorems. *Journal of Differential Equations*, 33(3) :353–358, 1979.