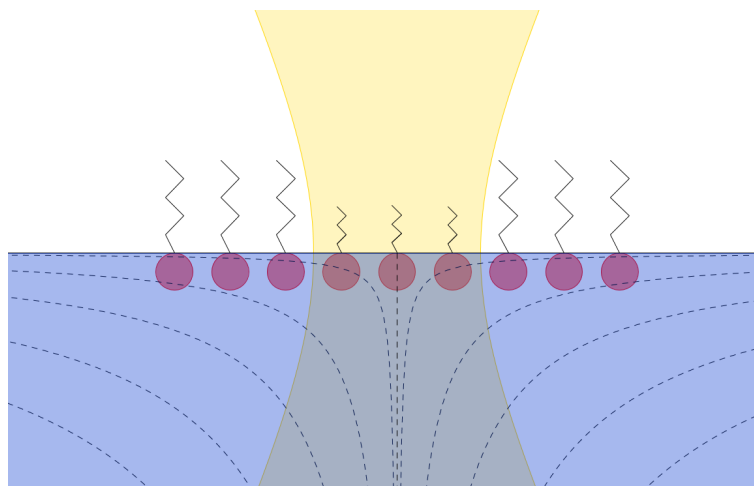

RAPPORT DE STAGE
3^{ème} année de Mathématiques

**ÉCOULEMENT DE MARANGONI CONTRÔLÉ PAR
LA LUMIÈRE**

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Si l'interface d'un liquide avec sa vapeur est soumise à un gradient de tension superficielle, le long de ladite interface s'effectue alors un transport de matière appelé écoulement de Marangoni. Dans ce rapport, le gradient de tension superficielle sera dû à une répartition inhomogène en tensioactif photocommutable dans l'état excité et le gradient de concentration sera lui-même provoqué par la localisation spatiale de l'excitation lumineuse; on cherchera à obtenir le champ de vitesse de l'écoulement induit.



Sous la direction de : Thomas BICKEL.

Date: 22 juin au 17 juillet.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	4
Introduction	5
1. Le profil de concentration en tensioactif dans l'état excité..	7
1.1. La photocommutation des tensioactifs	7
1.2. La diffusion des tensioactifs dans l'état excité.....	8
1.3. Le profil stationnaire du problème unidimensionnel	16
2. L'écoulement de Marangoni induit	21
2.1. La fonction de courant de l'écoulement	22
2.2. L'équation biharmonique en domaine rectangulaire	22
Analyse des résultats et prolongement du problème	29
Références.....	31

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude aux directions des études de l'Université Paris-Sud et du Magistère de mathématiques qui m'ont permis de compléter ma formation en suivant un apprentissage hors murs.

J'adresse mes sincères remerciements à la direction du Laboratoire Onde et Matière d'Aquitaine pour m'avoir généreusement accueilli dans leurs locaux sur la durée de quatre semaines.

Toute ma reconnaissance va enfin à Thomas BICKEL qui a bien voulu superviser mon stage et m'a encadré avec pertinence et dynamisme. Je le remercie d'avoir cherché à inscrire cette période d'apprentissage dans la continuité de mes connaissances mathématiques, en m'initiant notamment à la résolution des équations aux dérivées partielles.

INTRODUCTION

Si l'on considère un liquide en équilibre dynamique avec sa vapeur, les molécules au sein des deux milieux sont soumises à des interactions attractives, dites de Van Der Waals et à des interactions électrostatiques répulsives ; de telle manière qu'à l'intérieur des deux fluides la résultante de ces deux types d'interaction est nulle. Les molécules à l'interface des deux milieux étant soumises à l'action simultanée des deux fluides et la cohésion d'un liquide étant plus importante que celle d'un gaz, la résultante des interactions susnommées est non nulle (voir figure 1). L'équilibre dynamique assure alors l'existence d'une force à l'interface liquide-vapeur, il s'agit d'une tension de surface.

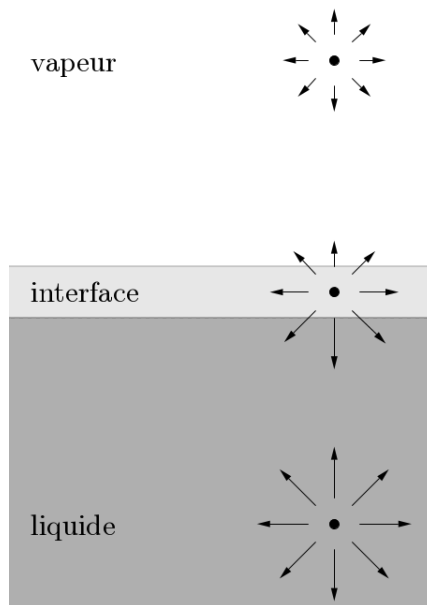


FIGURE 1. Représentation schématique des interactions microscopiques à une interface liquide-vapeur.

L'interface entre un liquide et sa vapeur est ainsi classiquement modélisée comme une surface mathématique à laquelle on associe une élasticité, nommée tension superficielle et que l'on exprime en $J.m^{-2}$ ou de manière équivalente en $N.m^{-1}$. Cette grandeur s'interprète comme l'énergie par unité de surface à fournir à l'interface d'un liquide avec sa vapeur pour la déformer ; un liquide avec une tension superficielle élevée résistera mieux aux contraintes dynamiques qu'un liquide avec une faible tension superficielle.

Certains composés chimiques appelés tensioactifs sont en mesure de modifier la tension superficielle de l'interface d'un liquide avec sa vapeur. Ces composés sont généralement constitués d'une chaîne carbonée

lipophile et d'une tête hydrophile (voir figure 2), c'est cette amphiphilie qui leur confère la capacité de s'agréger aux interfaces et d'en modifier la tension superficielle.

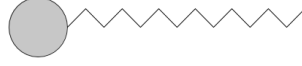


FIGURE 2. Représentation schématique d'un composé tensioactif typique.

Selon l'interprétation donnée de la tension superficielle, si l'interface d'un liquide avec sa vapeur est soumise à un gradient de tension superficielle, le long de ladite interface s'effectue alors un transport de matière des régions de basse tension vers les régions de haute tension superficielle ; ce transport de matière est nommé écoulement de Marangoni en l'honneur du physicien italien Carlo Marangoni (1840-1925) qui a étudié et caractérisé ce phénomène lors de sa thèse en 1865.

Dans le présent rapport, on provoquera un écoulement de Marangoni le long de l'interface de l'eau avec l'air grâce à des tensioactifs photo-commutables *i.e.* à des composés chimiques capables de modifier la tension superficielle de l'interface d'un liquide avec sa vapeur lorsqu'ils subissent une excitation lumineuse. C'est la localisation spatiale du faisceau laser qui sera responsable d'une inhomogénéité de la concentration en tensioactifs dans l'état excité et engendrera un gradient de tension superficielle. Notre étude débutera par la détermination du profil de concentration en tensioactif dans l'état excité et aboutira à l'expression du champ de vitesse de l'écoulement induit.

1. LE PROFIL DE CONCENTRATION EN TENSIOACTIF DANS L'ÉTAT EXCITÉ

Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , il s'agit de l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables ; on suppose initialement que les tensioactifs sont tous dans l'état non activé et que leur répartition dans Ω est homogène. Pour tout point $M \in \Omega$ et pour chaque instant $t > 0$, on note $c(M, t)$ la concentration en tensioactif dans l'état excité au point M et à l'instant t .

L'évolution spatiale et temporelle de c est régie par l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$(1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c - \alpha c + \beta I(M, t),$$

où $D > 0$ est la diffusivité de la matière dans l'eau exprimé en $m^2.s^{-1}$, $\alpha > 0$ est une constante multiplicative exprimée en s^{-1} , $\beta > 0$ est une constante multiplicative exprimée en $cd^{-1}.s^{-1}$ et $I(M, t)$ est l'intensité lumineuse du laser au point $M \in \Omega$ et à l'instant $t > 0$ exprimée en cd .

On admettra l'existence de solutions à l'équation (1) et pour assurer leur unicité il conviendra non seulement de spécifier le profil initial $c_0 : M \in \Omega \mapsto c(M, 0)$ mais aussi les conditions aux limites satisfaites par c , ce que l'on s'efforcera de faire lorsque que nous aurons spécifier la géométrie de l'interface Ω .

1.1. La photocommutation des tensioactifs. On s'intéresse ici à la photocommutation des tensioactifs *i.e.* à la réaction chimique de passage des tensioactifs dans l'état excité. On suppose que cette réaction chimique est univoque : une fois excités les tensioactifs le restent, d'ordre un et de constante de réaction $\alpha > 0$.

L'évolution de la concentration en tensioactif dans l'état excité est modélisé par l'équation différentielle ordinaire linéaire suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\alpha c.$$

Finalement, le profil de concentration en tensioactif dans l'état excité dans Ω est donné par :

$$c(M, t) = c(M, 0)e^{-\alpha t}.$$

Pour $t > 5/\alpha$, l'évolution temporelle de la concentration en tensioactif dans l'état excité n'est plus significative.

1.2. La diffusion des tensioactifs dans l'état excité. On s'intéresse désormais à la diffusion des tensioactifs dans l'état excité dans Ω , l'évolution de la concentration en tensioactif dans l'état excité est alors modélisée par l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$(2) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c.$$

On admet l'existence de solutions à l'équation (2) et pour assurer leur unicité il convient non seulement de spécifier $M \in \Omega \mapsto c(M, 0)$ mais aussi les conditions aux limites satisfaites par c , ce qui nous amène à spécifier la géométrie de Ω .

1.2.1. Résolution à une dimension. On s'intéresse ici à l'équation (2) en domaine unidimensionnel *i.e.* $\Omega \subset \mathbb{R}$. On note alors x la variable d'évolution spatiale de c , sous ces conditions, on a :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

L'équation (2) se réduit alors simplement à :

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

1.2.1.1. Domaine borné. On suppose ici que Ω est borné, c'est-à-dire que l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photo-commutables est spatialement limitée. Notons alors L la longueur du réceptacle exprimée en m *i.e.* $\Omega = [0, L]$. Pour cette géométrie de Ω , les conditions aux limites sont les suivantes :

$$(4) \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=L}.$$

Elles traduisent le fait que le mélange d'eau et de tensioactifs reste confiné au sein de l'interface Ω .

Dans le dessein de s'affranchir des grandeurs caractéristiques de notre problème, on introduit le \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme suivant :

$$\varphi : \begin{cases} [0, L] \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ (x, t) & \mapsto \left(\frac{x}{L}, \frac{Dt}{L^2} \right) \end{cases}.$$

En posant $f := c \circ \varphi$, le problème aux limites $\{(3), (4)\}$ s'exprime de la manière suivante en termes de variables adimensionnées :

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=0} = 0 = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=1} \right\}.$$

On résout (5) en utilisant la méthode de séparation des variables *i.e* on cherche g satisfant (5) sous la forme :

$$g(u, v) = g_1(u)g_2(v),$$

où g_1 est une fonction deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et g_2 une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+ . En supposant que g_1 et g_2 ne s'annulent pas sur leur domaine de définition respectif, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \Leftrightarrow \forall (u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \frac{g_1''(u)}{g_1(u)} = \frac{g_2'(v)}{g_2(v)}.$$

Sous cette hypothèse, on en déduit que les rapports $\frac{g_1''}{g_1}$ et $\frac{g_2'}{g_2}$ sont égaux et constants, si bien qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(6) \quad \begin{cases} g_1'' - kg_1 = 0 \\ g_2' - kg_2 = 0 \end{cases}.$$

Si l'on suppose par l'absurde que $k > 0$, $\lim_{+\infty} |g_2| = +\infty$ et puisque g_1 ne s'annule pas sur $[0, 1]$, il vient $\lim_{v \rightarrow +\infty} |g(0, v)| = +\infty$, ce que l'on interdit par soucis d'interprétation d'une concentration. Par conséquent, on dispose d'un $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $k = -\omega^2$ et avec (6), il vient :

$$\begin{cases} g_1(u) = A \cos(\omega u) + B \sin(\omega u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

Les conditions aux limites de (5) imposent à B d'être nul et garantissent l'existence d'un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = n\pi$. En résumé, on a :

$$\begin{cases} g_1(u) = A \cos(n\pi u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

En particulier, l'hypothèse de non annulation de g_1 et g_2 sur leur domaine de définition respectif est *a posteriori* vérifiée. Finalement, on a trouvé une famille de solutions de (5) sous la forme :

$$\left\{ g_n : (u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La fonction $n \in \mathbb{Z} \mapsto g_n$ étant paire, on peut se restreindre à la famille de solutions $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. La linéarité du problème aux limites (5) nous permet d'affirmer que tout élément de $\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ est encore solution de (5). Les propriétés des fonctions de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous permettent quant à elles de rendre licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

avec le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty}$, on en déduit que tout élément de $\overline{\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$

est solution du problème aux limites (5). Finalement, par unicité des solutions du problème aux limites (5), il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$f(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}.$$

Il nous reste à déterminer la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce que l'on va faire avec la donnée du profil initial f_0 . On constate pour cela que l'on a :

$$f_0(u) := f(u, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi u).$$

On prolonge f_0 sur \mathbb{R} en une fonction \tilde{f}_0 paire et 2-périodique. De cette manière, pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$(7) \quad \tilde{f}_0(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi u).$$

Par ailleurs, puisque f est solution de (5), \tilde{f}_0 est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Par théorème, la série de Fourier de \tilde{f}_0 converge normalement vers \tilde{f}_0 sur \mathbb{R} , en particulier avec (7), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_0(\xi) d\xi, & n = 0 \\ \int_{-1}^1 f_0(\xi) \cos(n\pi \xi) d\xi, & n > 0 \end{cases}.$$

Finalement, on a :

$$f(u, v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi, 0) d\xi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-1}^1 f(\xi, 0) \cos(n\pi \xi) d\xi \right) \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}.$$

Étudions graphiquement f lorsque nous imposons au profil initial de suivre une distribution de Dirac centrée en $1/2$. Dans ce cas précis, les coefficients intégraux se simplifient pour donner :

$$f(u, v) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\pi u) e^{-n^2 \pi^2 v}.$$

Commençons notre étude du comportement de cette solution par la représentation de quelques unes de ses lignes de niveau et intéressons nous plus précisément à celles données par $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$ et obtenues pour des valeurs significatives du paramètre v (voir figure 3).

On constate que lorsque v croît, $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$ se déforme continûment d'une distribution de Dirac centrée en $1/2$ en une fonction constante. Physiquement, cela signifie que les tensioactifs dans l'état

activé initialement présents se diffusent dans l'interface pour se répartir uniformément en son sein. Cette diffusion s'accompagne lorsque v croît d'une décroissance de l'amplitude maximale de $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$.

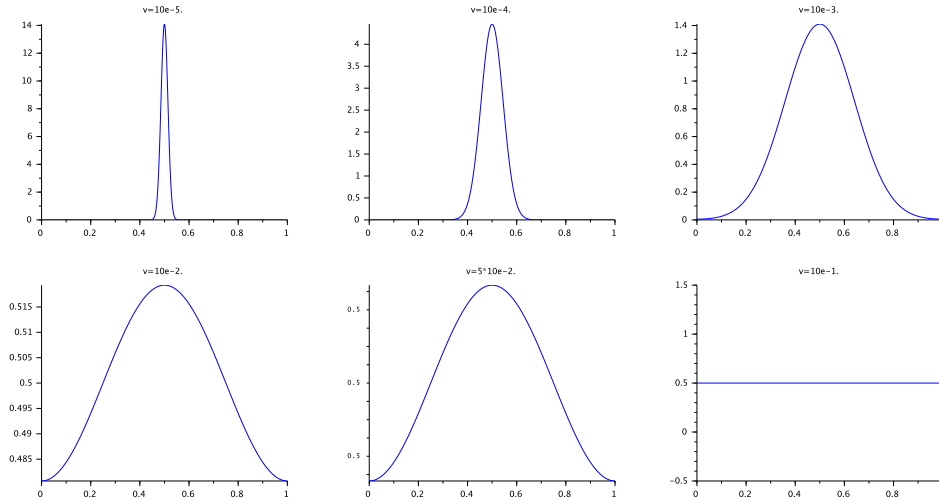


FIGURE 3. Représentation graphique de quelques lignes de niveaux de f obtenues pour des valeurs significatives du paramètre v .

Afin de donner une estimation de la décroissance, on trace en double échelle logarithmique $v \in \mathbb{R}_+ \mapsto f\left(\frac{1}{2}, v\right)$ (voir figure 4).

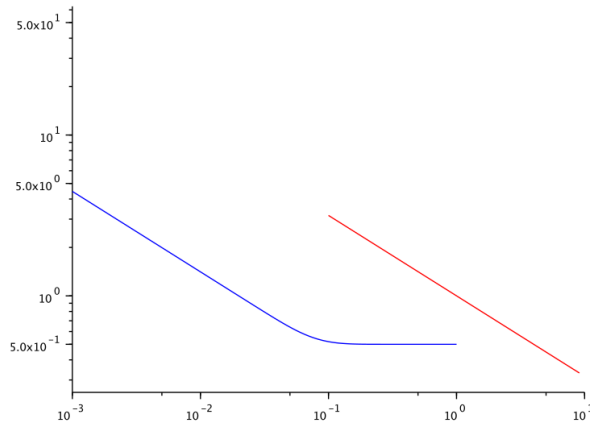


FIGURE 4. Représentations graphiques en échelle doublement logarithmique de $v \in \mathbb{R}_+ \mapsto f\left(\frac{1}{2}, v\right)$ (en bleu) et de $v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}}$ (en rouge).

Si l'on néglige les effets de bords induits par le caractère borné de Ω , on constate que les représentations graphiques en échelle doublement logarithmique de $v \in \mathbb{R}_+ \mapsto f\left(\frac{1}{2}, v\right)$ et de $v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}}$ sont des droites parallèles. On en déduit que lorsque v croît, l'amplitude maximale de $u \in [0, 1] \mapsto f(u, v)$ décroît comme $v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}}$.

Pour conclure cette partie, exprimons la concentration en tensioactifs dans l'état activé, en se rappelant que $c = f \circ \varphi^{-1}$, il vient :

$$c(x, t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L c(\xi, 0) d\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-L}^L c(\xi, 0) \cos\left(n\pi \frac{\xi}{L}\right) d\xi \right) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{Dt}{L^2}\right).$$

1.2.1.2. Domaine infini. On suppose ici que Ω est non borné, c'est-à-dire que l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables n'est pas spatialement limitée *i.e.* $\Omega = \mathbb{R}$. Pour cette géométrie de Ω , les conditions aux limites sont inexistantes.

On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ est de carré intégrable sur \mathbb{R} . De cette manière, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on peut définir $\widehat{c}(\cdot, t)$ la transformée de Fourier de $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ qui sera également une fonction intégrable sur \mathbb{R} et vérifiera la formule d'inversion de Fourier. On suppose également que c a les propriétés suffisantes pour rendre licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} c(x, \cdot) e^{-i\xi x} dx$.

Après avoir appliqué la transformée de Fourier par rapport à x à l'équation (3) et en tenant compte des hypothèses prises ci-dessus :

$$\frac{\partial \widehat{c}}{\partial t} = -D\xi^2 \widehat{c}.$$

On en déduit que l'on a :

$$\widehat{c}(\xi, t) = \widehat{c}(\xi, 0) e^{-D\xi^2 t}.$$

Finalement, d'après la formule d'inversion de Fourier, on a :

$$(8) \quad c(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{c}(\xi, 0) e^{-D\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

En particulier, si le profil initial $c_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, 0)$ a les bonnes propriétés, les hypothèses prises au début sont *a posteriori* vérifiées.

Déterminons c lorsque nous imposons au profil initial de suivre une distribution de Dirac centrée en 0. Dans ce cas précis, on a :

$$c(x, 0) = \delta(x).$$

Soit après avoir pris la transformée de Fourier par rapport à x :

$$\widehat{c}(\xi, 0) = 1.$$

Finalement, après calcul de l'expression intégrale (8), on a :

$$c(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

Commençons notre étude du comportement de cette solution par la représentation de quelques unes de ses lignes de niveau et intéressons nous plus précisément à celles données par $x \in [0, 1] \mapsto c(x, t)$ et obtenues pour des valeurs significatives du paramètre t (voir figure 5).

On constate que lorsque t croît, $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ se déforme continûment d'une distribution de Dirac centrée en 0 en une fonction constante. Physiquement, cela signifie que les tensioactifs dans l'état activé initialement présents se diffusent dans l'interface pour se répartir uniformément en son sein. Cette diffusion s'accompagne d'une décroissance de l'amplitude maximale de $x \in \mathbb{R} \mapsto c(x, t)$ en $\sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}}$.

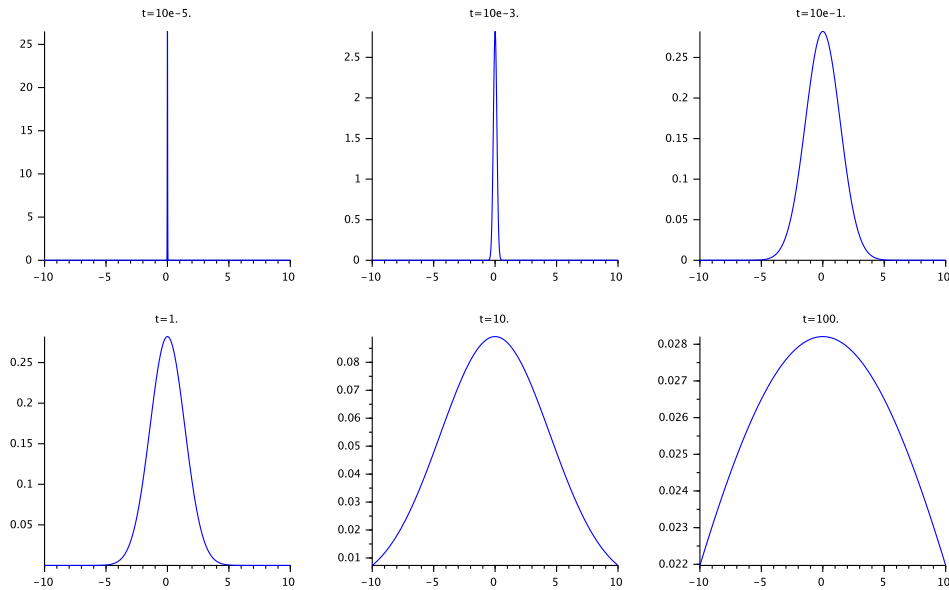


FIGURE 5. Représentation graphique de quelques lignes de niveaux de c obtenues pour des valeurs significatives du paramètre t .

Les solutions de l'équation (3) obtenues en domaine borné et infini ont des comportements similaires, ainsi, afin d'éviter la gestion des effets de bords induits par une interface bornée, les interfaces unidimensionnelles seront traitées comme étant infinies.

1.2.2. *Résolution dans un disque.* On s'intéresse ici à l'équation (2) en domaine circulaire borné *i.e.* on suppose Ω est le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$. On décrit alors le problème à l'aide des coordonnées polaires, ici notées $[r, \theta]$. On suppose également que c est invariant par révolution autour de l'axe \hat{z} , sous ces conditions, on a :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

L'équation (2) se réduit alors simplement à :

$$(9) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right).$$

Pour cette géométrie de Ω , il y a une seule condition aux limites :

$$(10) \quad \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Elle traduit le fait que le mélange d'eau et de tensioactifs reste confiné au sein de l'interface Ω .

Dans le dessein de s'affranchir des grandeurs caractéristiques de notre problème, on introduit le \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme suivant :

$$\varphi : \begin{cases} [0, R] \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ (r, t) & \mapsto \left(\frac{r}{R}, \frac{Dt}{R^2} \right) \end{cases}.$$

En posant $f := c \circ \varphi$, le problème aux limites $\{(9), (10)\}$ s'exprime de la manière suivante en termes de variables adimensionnées :

$$(11) \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u}, \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=1} = 0 \right\}.$$

On résout (11) en utilisant la méthode de séparation des variables *i.e.* on cherche g satisfant (11) sous la forme :

$$g(u, v) = g_1(u)g_2(v),$$

où g_1 est une fonction deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et g_2 une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+ . En supposant que g_1 et g_2 ne s'annulent pas sur leur domaine de définition respectif, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial g}{\partial u} \Leftrightarrow \forall (u, v) \in]0, 1] \times \mathbb{R}_+, \frac{u^2 g_1''(u) + u g_1'(u)}{u^2 g_1(u)} = \frac{g_2'(v)}{g_2(v)}.$$

Sous cette hypothèse, on en déduit que $u \in]0, 1] \mapsto \frac{u^2 g_1(u)'' + u g_1'(u)}{u^2 g_1(u)}$

et $\frac{g_2'}{g_2}$ sont égales et constantes, si bien qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(12) \quad \begin{cases} u^2 g_1'' + u g_1' - k u^2 g_1 = 0 \\ g_2' - k g_2 = 0 \end{cases}.$$

Si l'on suppose par l'absurde que $k > 0$, $\lim_{v \rightarrow +\infty} |g_2| = +\infty$ et puisque g_1 ne s'annule pas sur $[0, 1]$, il vient $\lim_{v \rightarrow +\infty} |g(0, v)| = +\infty$, ce que l'on interdit par soucis d'interprétation d'une concentration. Par conséquent, on dispose d'un $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $k = -\omega^2$ et avec (12), il vient :

$$\begin{cases} g_1(u) = A J_0(\omega u) + B Y_0(\omega u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

Si par l'absurde B est non nul, on a $|g_1(0)| = +\infty$ et puisque g_2 ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+ , on a $|g(0, 0)| = +\infty$, ce que l'on interdit par soucis d'interprétation d'une concentration. La condition aux limites de (11) garantit l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = j_{1,n}$, où $j_{1,n}$ est le n -ième zéro de la fonction de Bessel de première espèce J_1 . En résumé, on a :

$$\begin{cases} g_1(u) = A J_0(j_{1,n} u) \\ g_2(v) = C e^{-\omega^2 v} \end{cases}.$$

En particulier, l'hypothèse de non annulation de g_1 et g_2 sur leur domaine respectif de définition est *a posteriori* vérifiée. Finalement, on a trouvé une famille de solutions de (12) sous la forme :

$$\left\{ g_n : (u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \mapsto J_0(j_{1,n} u) e^{-j_{1,n}^2 v}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

La linéarité du problème aux limites (11) nous permet d'affirmer que tout élément de $\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ est encore solution de (11). Les propriétés des fonctions de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous permettent quant à elles de rendre

licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty}$, on

en déduit que tout élément de $\overline{\text{Vect}(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$ est solution du problème aux limites (11). Finalement, par unicité des solutions du problème aux limites (11), il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$f(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_0(j_{1,n} u) e^{-j_{1,n}^2 v}.$$

On pourrait montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond aux coefficients de la série de Fourier-Bessel de $f_0 : u \in [0, 1] \mapsto f(u, 0)$ prolongée à \mathbb{R} .

Pour conclure cette partie, exprimons la concentration en tensioactifs dans l'état activé, en se rappelant que $c = f \circ \varphi^{-1}$, il vient :

$$c(r, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_0 \left(j_{1,n} \frac{r}{R} \right) \exp \left(-j_{1,n}^2 \frac{Dt}{R^2} \right).$$

1.3. Le profil stationnaire du problème unidimensionnel. On s'intéresse à l'équation (1) en régime stationnaire et en domaine unidimensionnel infini *i.e.* $\Omega = \mathbb{R}$, en d'autres termes, on considère :

$$(13) \quad D \frac{d^2 c}{dx^2} - \alpha c + \beta I(x) = 0.$$

Pour cette géométrie de Ω , les conditions aux limites sont inexistantes.

1.3.1. Terme source : distribution de Dirac. On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une distribution de Dirac centrée en 0, l'équation (13) devient alors :

$$(14) \quad D \frac{d^2 c}{dx^2} - \alpha c + \beta \delta(x) = 0.$$

On suppose que c est de carré intégrable sur \mathbb{R} . De cette manière, \widehat{c} la transformée de Fourier de c sera également une fonction intégrable sur \mathbb{R} et vérifiera la formule d'inversion de Fourier.

Après avoir appliqué la transformée de Fourier à l'équation (4), on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{\beta}{D\xi^2 + \alpha}.$$

Finalement, d'après la formule d'inversion de Fourier, on a :

$$c(x) = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}} |x| \right).$$

L'hypothèse de carré intégrabilité de \widehat{c} est *a posteriori* vérifiée.

1.3.2. Terme source : fonction porte. On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une fonction porte centrée en 0 de demi-largeur $\sigma > 0$, l'équation (13) devient alors :

$$(15) \quad D \frac{d^2 c}{dx^2} - \alpha c + \beta \Pi_\sigma(x) = 0,$$

où l'on a noté :

$$\Pi_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\sigma, \sigma] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} .$$

On obtient la solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire (15) par convolution de la solution de (14) avec Π_σ :

$$c(x) = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}|x-y|\right) \Pi_\sigma(y) dy.$$

Finalement, après calculs, on a :

$$c(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\sigma\right), & \text{si } x \in]-\infty, -\sigma[\\ \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\sigma\right) \cosh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right)\right], & \text{si } x \in [-\sigma, \sigma] \\ \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\sigma\right), & \text{sinon} \end{cases} .$$

1.3.3. *Terme source : gaussienne.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une gaussienne centrée en 0 et d'écart-type $\sigma > 0$, l'équation (13) devient alors :

$$(16) \quad D \frac{d^2c}{dx^2} - \alpha c + \beta \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = 0.$$

On obtient la solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire (16) par convolution de la solution de (14) avec $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$:

$$c(x) = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}|x-y|\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

Finalement, après calculs, on a :

$$c(x) = \frac{\beta}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi \exp\left(\frac{\sigma^2 \alpha}{D}\right)}{4\alpha D}} \left[2 \cosh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x\right) + e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x} \operatorname{erf}\left(\frac{x - \sigma^2 \sqrt{\frac{\alpha}{D}}}{\sigma \sqrt{2}}\right) - e^{\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x} \operatorname{erf}\left(\frac{x + \sigma^2 \sqrt{\frac{\alpha}{D}}}{\sigma \sqrt{2}}\right) \right].$$

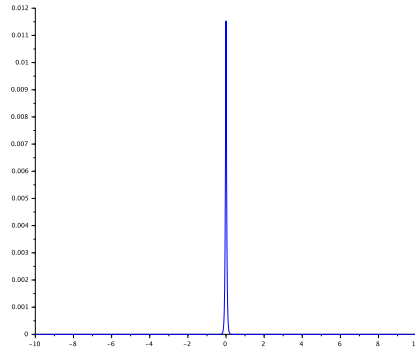


FIGURE 6. Le profil solution de l'équation (14), prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

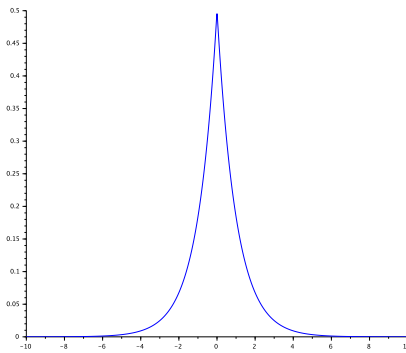


FIGURE 7. Le profil solution de l'équation (14), aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

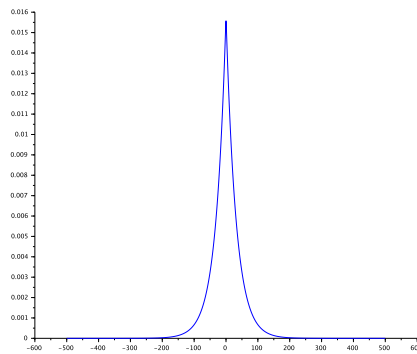


FIGURE 8. Le profil solution de l'équation (14), prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

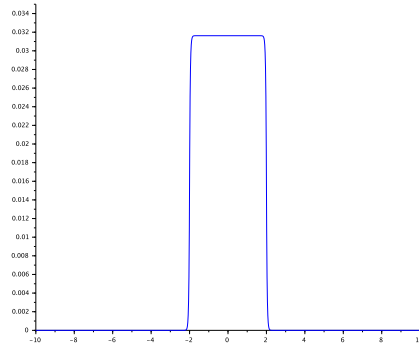


FIGURE 9. Le profil solution de l'équation (15), prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

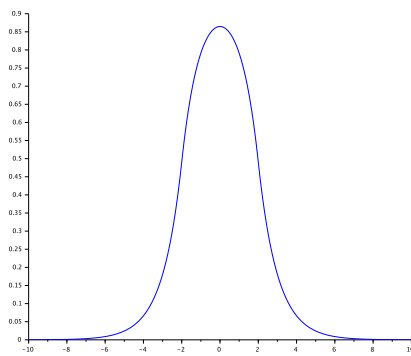


FIGURE 10. Le profil solution de l'équation (15), aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

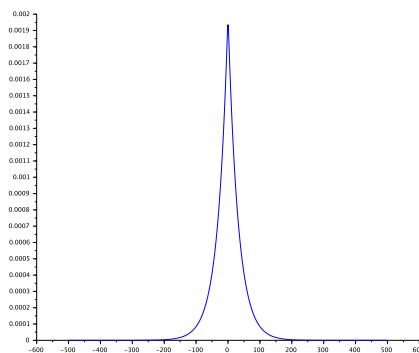


FIGURE 11. Le profil solution de l'équation (15), prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

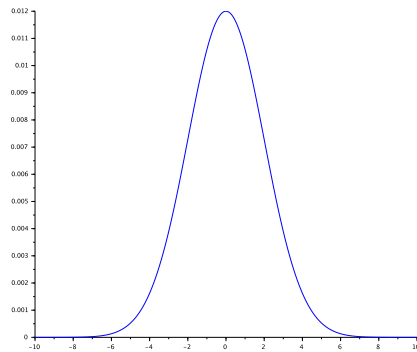


FIGURE 12. Le profil solution de l'équation (16), prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

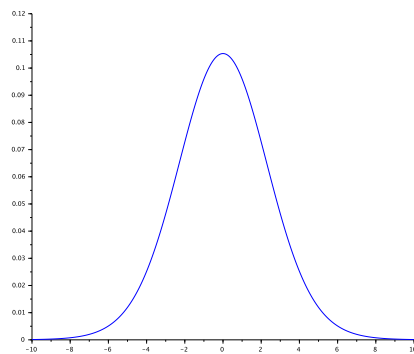


FIGURE 13. Le profil solution de l'équation (16), aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

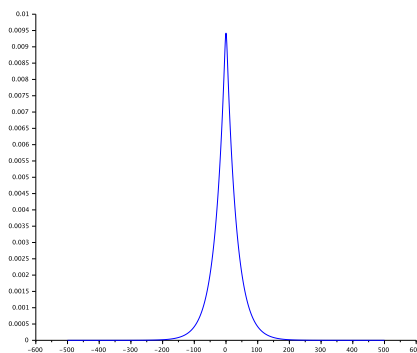


FIGURE 14. Le profil solution de l'équation (16), prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

2. L'ÉCOULEMENT DE MARANGONI INDUIT

Dans l'intégralité de cette partie, on suppose que l'interface avec l'air, notée Ω , du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables est unidimensionnelle infinie *i.e.* $\Omega = \mathbb{R}$. En particulier, le profil de la concentration en tensioactif dans l'état excité sera donné par l'un des résultats de la partie 1.3.. Par ailleurs, pour x dans Ω , on note $\gamma(x)$ la tension superficielle de Ω au point x et on modélise l'évolution spatiale de la tension superficielle dans Ω par l'équation suivante :

$$(17) \quad \gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 c(x),$$

où γ_0, γ_1 sont des constantes exprimées en $J.m^{-2}$ (ou en $N.m^{-1}$) et où $c(x)$ désigne la concentration en tensioactif dans l'état activé en $x \in \Omega$. En raison, de la dépendance spatiale de c , la tension superficielle au sein de Ω est inhomogène et d'après ce que nous avons développé en introduction, le long de Ω s'effectue un écoulement de Marangoni.

On suppose que le régime transitoire de l'écoulement est succinct, si bien que l'on ne s'intéresse qu'à son régime stationnaire. On suppose également que le mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables est un fluide incompressible *i.e.* que le volume du mélange reste constant sous l'action d'une pression externe. Enfin, on suppose que le mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables est suffisamment visqueux par rapport à la grandeur caractéristique sur laquelle s'exerce l'écoulement, ce afin de pouvoir négliger l'influence des termes inertiels. Sous l'ensemble de ces conditions, l'écoulement induit par le gradient de tension superficielle dans Ω est décrit par l'équation de Stokes :

$$(18) \quad \begin{cases} \eta \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} p \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases},$$

où $\vec{v}(x, z)$ est la vitesse du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables au point (x, z) exprimée en $m.s^{-1}$, $p(x, z)$ est la pression dans le mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables au point (x, z) exprimé en Pa et μ est la viscosité du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables exprimée en $Pa.s$.

On admet l'existence de solutions à l'équation (18) et afin de garantir leur unicité, il convient de spécifier les conditions aux limites associées à notre problème, ce que nous faisons immédiatement ci-dessous :

$$(19) \quad v_z(x, 0) = 0.$$

$$(20) \quad \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{z=0} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

Avec l'équation (17) la condition (20) devient :

$$(21) \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{z=0} = \frac{\gamma_1}{\eta} \frac{dc}{dx}.$$

La condition (19) traduit le fait que l'interface Ω ne subit pas de déplacements verticaux tandis que (20) correspond à un bilan des forces s'exerçant sur l'interface et exprime son équilibre, réunies, ces deux conditions signifient que l'interface Ω reste plane durant l'écoulement.

2.1. La fonction de courant de l'écoulement. Compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité du fluide *i.e.* de la contrainte $\text{div } \vec{v} = 0$, et de l'identité mathématique $\text{div} \circ \text{rot} \equiv 0$, on dispose d'un potentiel vecteur duquel derive \vec{v} . En d'autres termes, il existe une fonction vectorielle $\vec{A} \in (\mathbb{R}^3)^\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(22) \quad \vec{v} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Puisque $\vec{v} = \vec{v}(x, z)$, d'après (22) on peut imposer à A_x et A_z d'être identiquement nulles. En posant $\Psi := -A_y$, avec (22), il vient :

$$(23) \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Ψ est la fonction de courant, sa seule donnée permet de déterminer le champ de vitesse de l'écoulement.

2.2. L'équation biharmonique en domaine rectangulaire. Pour transformer l'équation (18) en une équation aux dérivées partielles sur la fonction de courant Ψ , on en prend le rotationnel ; sachant l'identité mathématique $\text{rot} \circ \text{grad} \equiv \vec{0}$, il vient :

$$(24) \quad \begin{aligned} \text{rot}(\Delta \vec{v}) = \vec{0} &\Leftrightarrow \text{rot} \left[\Delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] = \vec{0}, \\ &\Leftrightarrow \text{rot} \left[\Delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), 0, -\Delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] = \vec{0}, \\ &\Leftrightarrow \text{rot} \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3}, 0, \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial x} \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Schwarz et l'équation (24), il vient :

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} = 0.$$

Finalement, la fonction de courant vérifie l'équation biharmonique :

$$(25) \quad \Delta^2 \Psi = 0.$$

Exprimons désormais les conditions aux limites (19) et (21) en termes de la fonction de courant, avec (23), on a :

$$(26) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, 0) = 0,$$

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{z=0} = \frac{\gamma_1}{\eta} \frac{dc}{dx}.$$

On choisit l'axe \hat{z} dirigé vers le haut et par conséquent $z \in \mathbb{R}_-$. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{R}_-$, $x \in \mathbb{R} \mapsto \Psi(x, z)$ est de carré intégrable sur \mathbb{R} . De cette manière, pour tout $z \in \mathbb{R}_-$ on peut définir $\widehat{\Psi}(\cdot, z)$ la transformée de Fourier de $x \in \mathbb{R} \mapsto \Psi(x, z)$ qui sera également une fonction intégrable sur \mathbb{R} et vérifiera la formule d'inversion de Fourier. On suppose également que Ψ a les propriétés suffisantes pour rendre licite l'inversion des opérateurs $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^4}{\partial z^4}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, \cdot) e^{-i\xi x} dx$.

Après avoir appliqué la transformée de Fourier par rapport à x à l'équation (25) et en tenant compte des hypothèses prises ci-dessus :

$$\frac{\partial^4 \widehat{\Psi}}{\partial z^4} - 2\xi^2 \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}}{\partial z^2} + \xi^4 \widehat{\Psi} = 0.$$

On en déduit qu'il existe $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ telle que l'on ait :

$$\widehat{\Psi}(\xi, z) = [A(\xi) + B(\xi)z] e^{|\xi|z} + [C(\xi) + D(\xi)z] e^{-|\xi|z}.$$

L'intégrabilité de $\xi \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{\Psi}(\xi, z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}_-$ assure que :

$$C \equiv 0 \equiv D.$$

À ce stade du raisonnement, on a :

$$(28) \quad \widehat{\Psi}(\xi, z) = [A(\xi) + B(\xi)z] e^{|\xi|z}.$$

Afin de déterminer complètement $\widehat{\Psi}$, prenons la transformée de Fourier par rapport à x des conditions aux limites (26) et (27) :

$$(29) \quad i\xi \widehat{\Psi}(\xi, 0) = 0,$$

$$(30) \quad \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \xi^2 \widehat{\Psi}(\xi, 0) = -\frac{\gamma_1}{i\eta} \xi \widehat{c}(\xi).$$

Par continuité de $\xi \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{\Psi}(\xi, 0)$ en zéro et d'après (29), on a :

$$(31) \quad \widehat{\Psi}(\xi, 0) = 0.$$

En réinjectant cette information dans (30), on a :

$$(32) \quad \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -\frac{\gamma_1}{i\eta} \xi \widehat{c}(\xi).$$

D'après, (28), (31) et (32), on a :

$$\begin{aligned} A(\xi) &= 0, \\ B(\xi) &= -\frac{\gamma_1}{2i\eta} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{c}(\xi). \end{aligned}$$

En résumé, d'après (28), on a :

$$\widehat{\Psi}(\xi, z) = -\frac{\gamma_1}{2i\eta} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{c}(\xi) z e^{|\xi|z}.$$

Finalement, d'après la formule d'inversion de Fourier, on a :

$$(33) \quad \Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1}{4i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{c}(\xi) z e^{|\xi|z} e^{i\xi x} d\xi.$$

En particulier, si c a les propriétés suffisantes, les hypothèses prises au début sont *a posteriori* vérifiées.

2.2.1. *Terme source : distribution de Dirac.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une distribution de Dirac centrée en 0, d'après la partie 1.3.1., on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{\beta}{D\xi^2 + \alpha}.$$

L'identité (33) devient alors :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\beta}{4i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{z e^{|\xi|z} e^{i\xi x}}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

En utilisant la relation de Chasles et après un changement de variable :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\beta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{z e^{\xi z} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

Finalement, d'après (23), on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} v_x(x, z) &= -\frac{\gamma_1\beta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + \xi z) e^{\xi z} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi, \\ v_z(x, z) &= \frac{\gamma_1\beta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{\xi z e^{\xi z} \cos(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi. \end{aligned}$$

2.2.2. *Terme source : fonction porte.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une fonction porte centrée 0 de demi-largeur $\sigma > 0$, d'après la partie 1.3.2., on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{2\sigma\beta}{D\xi^2 + \alpha} \text{sinc}(\sigma\xi).$$

L'identité (33) devient alors :

$$\Psi(x, z) = \frac{\gamma_1\beta\sigma}{2i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{ze^{|\xi|z} \text{sinc}(\sigma\xi) e^{i\xi x}}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

En utilisant la relation de Chasles et après un changement de variable :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\beta\sigma}{\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{ze^{\xi z} \text{sinc}(\sigma\xi) \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

Finalement, d'après (23), on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} v_x(x, z) &= -\frac{\gamma_1\sigma\beta}{\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + \xi z)e^{\xi z} \text{sinc}(\sigma\xi) \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi, \\ v_z(x, z) &= \frac{\gamma_1\sigma\beta}{\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{\xi ze^{\xi z} \text{sinc}(\sigma\xi) \cos(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi. \end{aligned}$$

2.2.3. *Terme source : gaussienne.* On suppose ici que l'intensité du laser en fonction de la position suit une gaussienne centrée 0 d'écart-type $\sigma > 0$, d'après la partie 1.3.3., on a :

$$\widehat{c}(\xi) = \frac{\sigma\beta\sqrt{2\pi}}{D\xi^2 + \alpha} \exp\left[-\frac{(\sigma\xi)^2}{2}\right].$$

L'identité (33) devient alors :

$$\Psi(x, z) = \frac{\gamma_1\sigma\beta\sqrt{2\pi}}{4i\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{ze^{-|\xi|z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} e^{i\xi x}}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

En utilisant la relation de Chasles et après un changement de variable :

$$\Psi(x, z) = -\frac{\gamma_1\sigma\beta}{\sqrt{2\pi}\eta} \int_0^{+\infty} \frac{ze^{\xi z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi.$$

Finalement, d'après (23), on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} v_x(x, z) &= -\frac{\gamma_1\sigma\beta}{\sqrt{2\pi}\eta} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + \xi z)e^{\xi z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} \sin(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi, \\ v_z(x, z) &= \frac{\gamma_1\sigma\beta}{\sqrt{2\pi}\eta} \int_0^{+\infty} \frac{\xi ze^{\xi z} e^{-(\xi\sigma)^2/2} \cos(\xi x)}{D\xi^2 + \alpha} d\xi. \end{aligned}$$

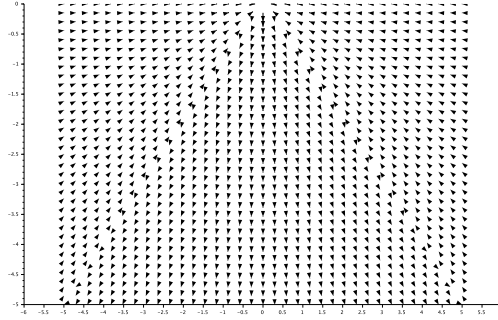


FIGURE 15. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source en distribution de Dirac, prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

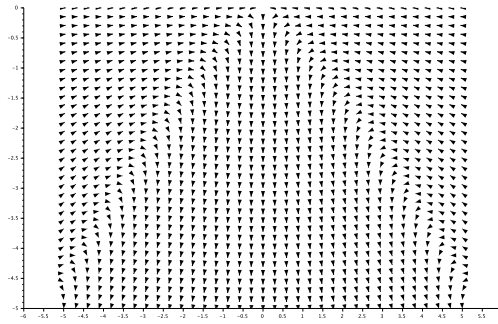


FIGURE 16. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source en distribution de Dirac, aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

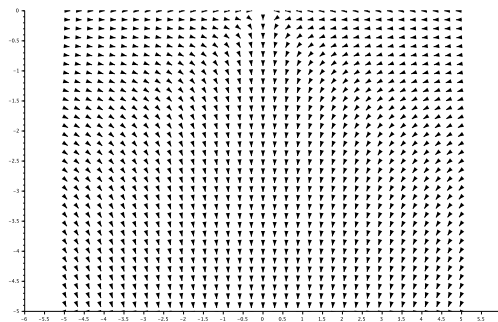


FIGURE 17. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source en distribution de Dirac, prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

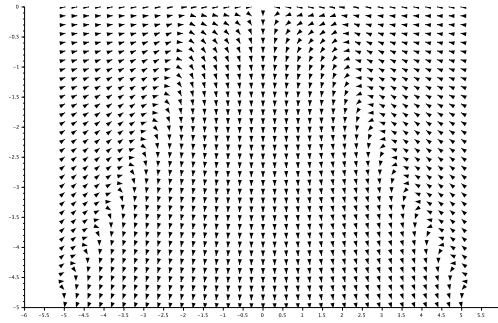


FIGURE 18. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source suivant une fonction porte, prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

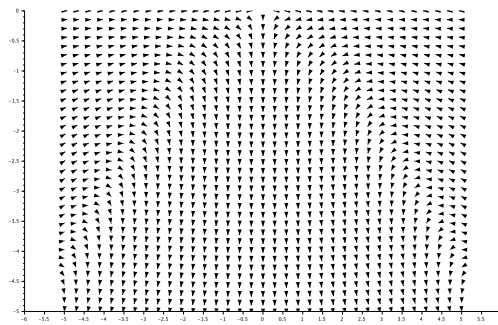


FIGURE 19. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source suivant une fonction porte, aucune prédominance *i.e.* $D \approx \alpha$.

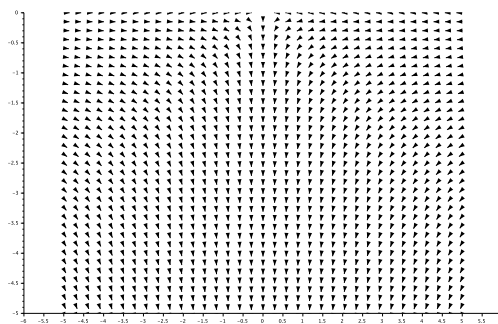


FIGURE 20. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source suivant une fonction porte, prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

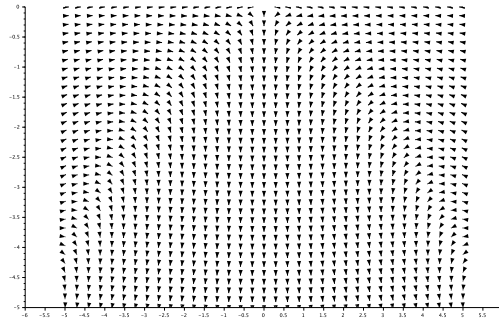


FIGURE 21. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source gaussien, prédominance de la réaction chimique *i.e.* $D \ll \alpha$.

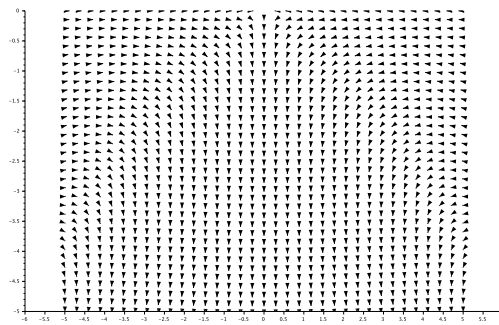


FIGURE 22. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source gaussien, aucune prédominance *i.e.* $\alpha \approx D$.

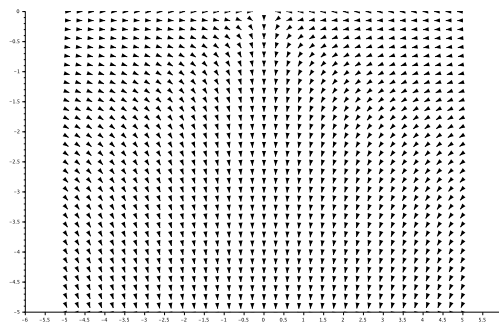


FIGURE 23. Champ de vitesse de l'écoulement obtenu pour un terme source gaussien, prédominance de la diffusion *i.e.* $\alpha \ll D$.

ANALYSE DES RÉSULTATS ET PROLONGEMENT DU PROBLÈME

Les différents modèles adoptés pour la répartition spatiale de l'intensité d'un laser (distribution de Dirac, fonction porte, gaussienne) ont abouti à des profils stationnaires de la concentration en tensioactif dans l'état activé similaires. En effet, lorsque la réaction chimique est prédominante *i.e.* $D \ll \alpha$, le profil de concentration en tensioactif dans l'état activé prend la forme du terme source (voir figures 6, 9 et 12) alors que lorsque la diffusion est prédominante *i.e.* $\alpha \ll D$, le profil de concentration s'étale spatialement en prenant la forme d'un pic centré en la zone d'éclairement du laser (voir figures 8, 11 et 14). La régularité de la répartition spatiale de l'intensité du laser influence seulement le caractère lisse du profil de concentration.

Par ailleurs, on constate qu'en présence d'une prédominance de la réaction chimique ou de la diffusion, l'amplitude maximale de la concentration en tensioactif dans l'état activé diffère d'un facteur 1/10 avec celle que l'on obtiendrait si la réaction chimique et la diffusion étaient équilibrés *i.e.* $\alpha \approx D$ (voir figures 7, 10 et 13). Si la réaction chimique est prédominante, les tensioactifs photocommutables dans la zone d'éclairement du laser sont excités, la diffusion ne permettant pas de les évacuer de la zone, on aboutit alors à l'inhibition de la réaction chimique. En revanche, si la diffusion est prédominante, les tensioactifs photocommutables sont rapidement évacués de la zone d'éclairement empêchant alors la réaction chimique d'opérer efficacement.

Les différents profils de concentration dont il est fait mention ci-dessus ont induit des écoulements de Marangoni similaires. En effet, au niveau de l'interface, $z = 0$, les différents écoulements s'effectuent en surface, en convergeant vers la zone d'éclairement du laser, alors que pour $z \neq 0$, ils tendent à conduire le liquide en profondeur, sous cette même zone d'éclairement (voir figures 16, 19 et 22). Les paramètres du problème α et D n'influencent pas l'allure du champ de vitesse de l'écoulement de Marangoni induit. Cependant, lorsque la réaction chimique est prédominante, l'écoulement est plus prononcé (voir figures 15, 18 et 21), en revanche, lorsque la diffusion est prédominante l'écoulement est plus doux (voir figures 17, 20 et 23). La régularité de la répartition spatiale de l'intensité du laser n'a pas d'influence visible sur l'écoulement induit.

Remarque : En raison de la nature analytique du champ de vitesse de l'écoulement *i.e.* de son expression sous forme intégrale, nous avons été contraints d'approximer ces intégrales en exploitant la méthode de Simpson, ce qui nous a alors permis de visualiser l'écoulement.

Durant notre étude, nous avons supposé que l'interface avec l'air du mélange d'eau et de tensioactifs photocommutables était plane et le restait même au cours de l'écoulement. Une meilleure description de notre problème consisterait à autoriser la déformation de cette interface, ce qui nous permettrait notamment de prendre en compte les effets de profondeur finie. En effet, sous nos hypothèses de travail, nous avons pu constater que le liquide a tendance à s'écouler en profondeur. Si le récipient était limité en profondeur, on observerait alors un reflux du liquide engendrant, à la manière d'une vague, une bosse en surface et donc un déplacement vertical de l'interface. La gestion des déformations de l'interface complexifierait l'expression des conditions aux limites et rendrait difficile la résolution du problème aux limites régissant le champ de vitesse de l'écoulement.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, pages 358,361. Applied Mathematics. National Bureau of Standards, 1972.
- [2] Alexander D. Poularikas. *Transforms and Applications Handbook*, chapter Fourier Transform. Electrical Engineering Handbook. CRC Press, 2010.
- [3] K. F. Riley and M. P. Hobson. *Essential Mathematical methods for the Physical Sciences*, pages 170–174,179,191–202,233–236,277–279,347–359,408–412,421–475. Cambridge University Press, 2011.
- [4] A. Royston. Notes on the Dirac Delta and Green Functions. Novembre 2008.
- [5] S. N. Varanakkottu, S. D. George, T. Baier, S. Hardt, M. Ewald, and M. Biesalski. Particle Manipulation Based on Optically Controlled Free Surface Hydrodynamics. *Angewandte Chemie Int. Ed.*, 52 :7291–7295, Juillet 2013.