

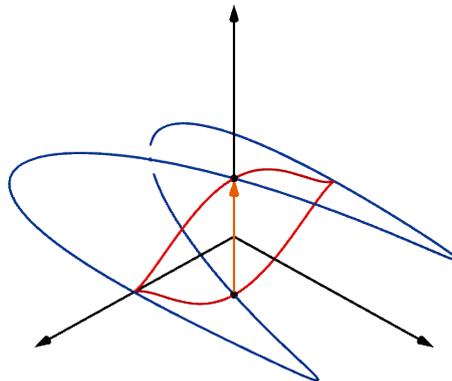
MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES
Master 2 Recherche de Mathématiques

SUR LA GÉOGRAPHIE DE L'HOMOLOGIE POUR LES FAMILLES GÉNÉRATRICES

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Nous proposons une approche par la théorie de Morse-Bott à la classification des sous-variétés legendriennes d'un espace de premiers jets. Dans ce mémoire, nous construisons et étudions l'homologie génératrice, un invariant pour les familles génératrices des sous-variétés legendriennes. En particulier, nous dégageons une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie génératrice, la cohomologie correspondante et l'homologie de la sous-variété legendrienne ; elle généralise la dualité de Poincaré des variétés. Ce résultat de structure contraint les valeurs de l'homologie génératrice et permet de mieux appréhender la diversité des sous-variétés legendriennes.

$$HG_{\bullet}(f) := H_{\bullet+N+1}(\delta^{\omega}, \delta^{\varepsilon}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$



$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\tau_k} & H_k(\Lambda) & \xrightarrow{\sigma_k} & HG^{n-k}(f) & \xrightarrow{\rho_k} & HG_{k-1}(f) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow \alpha & & \swarrow \tau_{n-k}^* & & \\ & & H^{n-k}(\Lambda) & & & & \end{array}$$

Sous la direction de Frédéric BOURGEOIS

Date : de Janvier à Août 2018.

C'est une question d'énergie,
un problème de contact.

La Compagnie Créole

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements.....	6
Introduction et motivations.....	7
1. Un bref aperçu de la géométrie de contact.....	13
1.1. Les structures de contact.....	13
1.2. Les sous-variétés legendriennes.....	14
1.3. Les modèles locaux en géométrie de contact.....	15
2. Les sous-variétés legendriennes d'un espace de premiers jets.....	17
2.1. Les projections lagrangiennes et frontales.....	17
2.2. Les familles génératrices des sous-variétés legendriennes.....	20
2.3. Vers la classification des sous-variétés legendriennes.....	22
3. L'homologie pour les familles génératrices.....	23
3.1. La fonction différence d'une famille génératrice.....	23
3.2. Un invariant homologique pour les familles génératrices.....	24
3.3. La géographie de l'homologie pour les familles génératrices....	27
Conclusion et ouverture.....	32
Annexe A. La forme de Liouville d'un fibré cotangent.....	34
Annexe B. Une boîte à outils d'algèbre homologique.....	35
B.1. Les anneaux et les modules gradués.....	35
B.2. Les complexes de chaînes et leurs homologies.....	35
B.3. La suite exacte longue induite en homologie.....	36
Annexe C. Un tour d'horizon de la théorie de Morse.....	37
C.1. Les fonctions de Morse.....	37
C.2. Les variétés stables et instables.....	39
C.3. Le complexe de Morse et son homologie.....	41
C.4. Des résultats structuraux de l'homologie de Morse.....	44
C.5. Quelques mots sur la théorie de Morse-Bott.....	45
Annexe D. Deux calculs explicites d'homologie génératrice.....	47
D.1. Le cercle legendrien standard usuel.....	47
D.2. Une déformation du cercle legendrien standard.....	47
D.3. Observations et conséquences.....	49
Références.....	50

REMERCIEMENTS

J'adresse mes tous premiers remerciements à Frédéric BOURGEOIS pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant sans hésitation de m'encadrer pour mon mémoire de Master 2. Je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'il s'est ensuite engagé à diriger mes recherches sur les trois prochaines années à venir. Je souhaite ici témoigner de mon impatience à poursuivre en doctorat aux côtés d'une personne aussi bienveillante et impliquée que Frédéric l'est.

Nous voulions initialement explorer les liens qu'entretiennent la géométrie de contact et la thermodynamique, mais je n'ai malheureusement pas su trouver des développements suffisamment intéressants pour en constituer ce mémoire. Quand je lui ai fait part de mes inquiétudes dues à l'impasse dans laquelle je me trouvais, il s'est montré rassurant et compréhensif puisqu'il m'a très rapidement proposé des directions de recherche plus proches de ma sensibilité.

J'ai été marqué par l'enthousiasme débordant et systématique avec lequel il m'a initié à ses recherches et a répondu à mes nombreuses interrogations. Je suis aussi sensible aux efforts qu'il a toujours fournis pour me transmettre ses intuitions géométriques, c'est pour moi un véritable modèle.

Je sais gré à Patrick MASSOT de m'avoir spontanément cédé son ancienne édition de l'ouvrage *Introduction to Symplectic Topology* de Dusa McDUFF et Dietmar SALAMON, ce livre m'accompagne depuis fidèlement dans mes débuts en topologie symplectique et de contact. Je tiens également à lui témoigner ma gratitude pour m'avoir présenté les théorèmes de Gray et d'extension des isotopies legendriennes sous l'angle plus intrinsèque des fibrations naturelles. J'ai désormais une compréhension enrichie et plus profonde de ces résultats.

Je veux remercier chaleureusement Patrick MASSOT et Anne VAUGON pour m'avoir fait répéter avec attention mon audition pour les allocations doctorales. Je sais que leurs conseils m'ont été précieux, ils m'ont permis d'aborder plus sereinement cet entretien de véritable importance.

Je suis à la fois ravi et honoré qu'ils aient tous les deux acceptés de faire partie de mon jury de soutenance de mémoire.

Je tiens enfin à témoigner toute mon amitié à Claudia et Irving CALDERÓN, ainsi qu'à Elio JOSEPH pour avoir assisté à ma soutenance, cela m'a réellement fait chaud au cœur d'avoir pu partager un peu de mes mathématiques avec eux.

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

L'une des motivations principales aux recherches en géométrie différentielle provient de son aptitude particulière à procurer un formalisme mathématique adapté à la modélisation des phénomènes physiques de notre univers.

L'*espace des configurations* d'un système physique est une variété différentielle, composée de l'ensemble de tous les états qui lui sont virtuellement accessibles. Les contraintes physiques qui s'exercent sur le système sont encodées dans une structure géométrique additionnelle généralement donnée par un tenseur. C'est de cette manière que la célèbre théorie de la relativité générale s'inscrit en géométrie riemannienne et que la mécanique hamiltonnienne relève de la géométrie symplectique des fibrés cotangents.

Nous donnons désormais un exemple détaillé de cette méthode appliquée, à un phénomène plus proche des considérations de ce mémoire :

Considérons une voiture roulant sans glisser sur un revêtement supposé plat, alors son vecteur vitesse est constamment dirigé dans la direction de ses roues. Réperons la position de la voiture à l'aide de coordonnées $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, où (x, y) situent son centre de masse et θ désigne l'angle de rotation des roues.

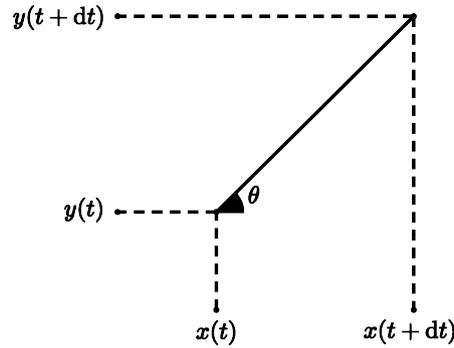


FIGURE 1. Le déplacement infinitésimal de la voiture.

Notre observation implique que le mouvement du véhicule est régi par :

$$\dot{x} \sin(\theta) = \dot{y} \cos(\theta),$$

ou encore en disant que la trajectoire de la voiture est partout tangente à la distribution de plans de l'espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times S^1$ donné par :

$$\xi := \ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy).$$

Les contraintes de roulement sans glissement sont encodées dans le champ ξ . Cette situation physique relève directement des structures de contact et tout particulièrement de l'étude de leurs sous-variétés legendriennes¹.

1. Notre voiture décrit ce qui est une sous-variété legendrienne des plans de contact ξ , mais pourquoi pouvons-nous, malgré cette contrainte, nous déplacer librement ?

Une *structure de contact* est un champ d'hyperplans tangents à une variété de dimension impaire qui minimise la dimension des sous-variétés qui lui sont partout tangentes, cette distribution est *maximalement non-intégrable*.

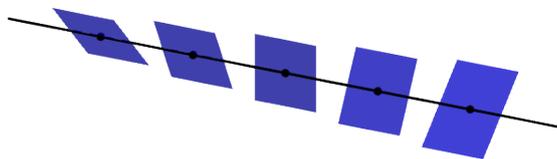


FIGURE 2. Une structure de contact.

Cette géométrie permet de réinterpréter formellement le principe d'Huyghens de l'optique géométrique, ainsi que le premier principe de la thermodynamique. Nous invitons d'ailleurs le lecteur intéressé par une introduction historique à la géométrie de contact à consulter l'article [13] de Hansjörg Geiges.

Les sous-variétés *legendriennes* d'une variété de contact sont partout tangentes à sa structure de contact et sont de dimension maximale pour cette propriété. Ces sous-variétés sont intrinsèquement en tension avec les structures de contact et leur comportement imprévisible en fait des objets d'étude privilégiés.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la classification des sous-variétés legendriennes à *isotopie legendrienne* près, qui sont les déformations qui restent au cours du temps partout tangentes à la structure de contact.

Ce problème conserve une saveur empruntée de la théorie des nœuds.

La topologie classique échoue complètement à décrire les classes d'isotopie legendrienne puisqu'une isotopie lisse, entre deux sous-variétés legendriennes, ne suffit pas à garantir l'existence d'une isotopie legendrienne :

Théorème. Une classe d'isotopie lisse d'une sous-variété legendrienne se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes.

Nous parlons de la *rigidité* des sous-variétés legendriennes, elles contiennent une information géométrique non triviale sur la structure de contact elle-même.

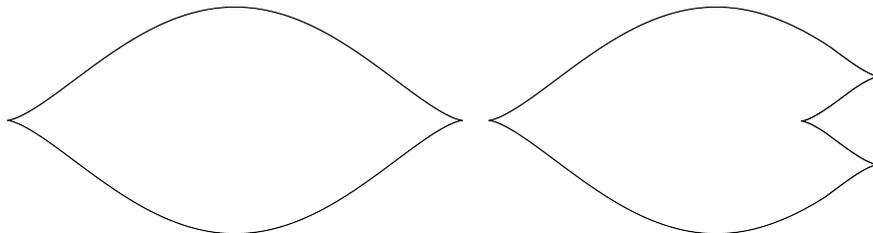


FIGURE 3. Les projections dans $\{y = 0\}$ de cercles legendriens non legendriennement isotopes de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}} := \ker(dz - ydx))$.

Ce phénomène est véritablement surprenant, car les sous-variétés legendriennes sont de grande codimension dans les variétés de contact, elles sont « petites », mais elles sont excessivement difficile à transporter, elles sont « encombrantes ».

La classification des sous-variétés legendriennes à isotopie legendrienne près est un problème riche et encore très vastement ouvert, voir à titre d'exemple l'article [9] de Tobias Elkholtm, John Etnyre et Michael Sullivan.

Nous ignorons encore aujourd'hui qu'elle peut être la classification complète des sous-variétés legendriennes ayant une topologie donnée et ce y compris dans les variétés de contact relativement simples, comme les espaces de premiers jets. La résolution de ce problème ne peut être envisagée que par le développement d'invariants algébriques calculables, permettant de distinguer avec précision les différentes classes d'isotopie legendrienne.

Nous disposons par exemple des *nombre de rotation* et de *Thurston-Bennequin*, deux invariants qui permettent ensemble de distinguer complètement les nœuds legendriens triviaux de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}})$, voir [10] de Yakov Eliashberg et Maia Fraser. Ces invariants dits *classiques* échouent cependant à différencier entièrement tous les nœuds legendriens de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}})$, nous pouvons en trouver un exemple explicite dans l'article [8] de Yuri Chekanov.

Les *classes de Maslov* sont des invariants homologiques en tout degré qui généralisent le nombre de rotation aux sous-variétés legendriennes d'une variété de contact quelconque, voir l'article [11] de Dmitry Fuchs.

Les invariants algébriques les plus sophistiqués des sous-variétés legendriennes sont définis à partir des *cordes de Reeb*, qui sont les trajectoires non constantes du *champ de Reeb* joignant des points d'une même sous-variété legendrienne. Par construction, ce champ de vecteurs porte toute l'information provenant de la structure de contact, ce qui permet aux cordes de Reeb de restituer, au moins partiellement, la géométrie de contact des sous-variétés legendriennes.

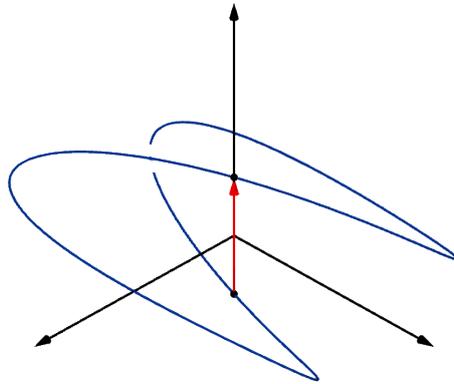


FIGURE 4. La seule corde de Reeb d'un nœud legendrien de $J^1\mathbb{R}$.

Nous étudions seulement les espaces de premiers jets, car ils « façonnent » toutes les variétés de contact au voisinage de leurs sous-variétés legendriennes. D'une certaine manière, nous nous concentrons seulement sur la classification locale des sous-variétés legendriennes des variétés de contact.

Certaines sous-variétés legendriennes $\Lambda \subset J^1X$ peuvent être décrites en termes des points et des valeurs critiques d'une *famille génératrice* $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Lambda = \{(x, \partial_x f(x, e), f(x, e)) \mid \partial_e f(x, e) = 0\},$$

avec $\mathbf{0} \in (\mathbb{R}^N)^*$ une valeur régulière de l'application $\partial_e f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$.

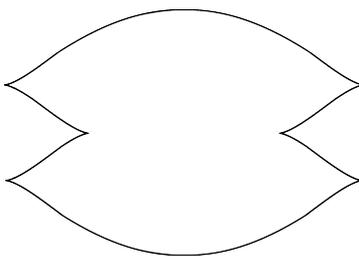


FIGURE 5. Un nœud legendrien n'admettant pas de famille génératrice.

Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne en induit une infinité d'autres en la précomposant par des difféomorphismes *fibrés* et en la *stabilisant*, alors toutes les familles génératrices ainsi obtenues sont déclarées équivalentes. Cette première opération consiste à permuter dans les fibres les points critiques de la famille génératrice, alors que la seconde opération revient à rajouter des dimensions dans les fibres le long desquelles elle varie quadratiquement.

Un théorème important de Yuri Chekanov dans [7] assure que les isotopies legendriennes préservent les familles génératrices et leurs classes d'équivalence. Observons aussi que les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne Λ décrite par une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ s'appartient avec les points critiques de la *fonction différence* associée $\delta: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\delta(x, e_1, e_2) := f(x, e_1) - f(x, e_2).$$

Ces deux observations permettent ensemble d'envisager, dans la philosophie de l'homologie de Morse, la classification des sous-variétés legendriennes par celles de leurs familles génératrices.

Les familles génératrices *linéaires à l'infini* possèdent une théorie de Morse suffisamment agréable pour développer des invariants homologiques élaborés. Dans ce mémoire, nous étudions une homologie pour les familles génératrices, elle se nomme *homologie génératrice* $HG(f)$ de f et elle est définie comme l'homologie relative des sous-niveaux ω et ε de sa fonction différence δ :

$$HG_k(f) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

avec les valeurs critiques strictement positives de δ strictement comprises entre les réels ε et ω , voir les articles [18] et [22] de Joshua Sabloff et Lisa Traynor.

Nous attirons d'emblée l'attention du lecteur, la *graduation* de $HG_\bullet(\cdot)$ dépend directement de la dimension de la fibre du domaine de la famille génératrice, cette précaution est nécessaire pour assurer son invariance par stabilisation. Cette homologie « compte » les trajectoires d'un pseudo-gradient adapté de la fonction différence δ entre des cordes de Reeb de la sous-variété legendrienne engendrée par la famille génératrice f .

La connaissance des familles génératrices d'une sous-variété legendrienne est souvent trop qualitative pour que l'on puisse comprendre précisément la topologie des sous-niveaux des fonctions différences qui leurs sont associées. Par conséquent, le calcul de l'homologie génératrice est grandement compromis, mais nous arrivons à palier cette apparente difficulté en obtenant des résultats de structure sur l'homologie génératrice.

Dans ce mémoire, nous adaptions la dualité de Poincaré pour dégager une longue suite exacte de dualité reliant l'homologie génératrice, la cohomologie correspondante et l'homologie de la sous-variété legendrienne.

Théorème (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [5]). Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe de J^1X qui admet une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f) \rightarrow \cdots .$$

De plus, les applications τ_k satisfont deux propriétés supplémentaires :

1. Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est l'isomorphisme de dualité de Poincaré, alors les applications $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.
2. L'application $\tau_n: HG_n(f) \rightarrow H_n(\Lambda)$ est surjective.

En particulier, l'espace vectoriel $HG_n(f)$ est de dimension au moins un.

Ce résultat a permis à leurs auteurs de déterminer tous les modules gradués qui peuvent être réalisés comme l'homologie génératrice d'une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne, nous parlons de *géographie* ou *cartographie* :

Théorème (F. Bourgeois, J. Sabloff, L. Traynor, 2015, [5]). Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe de J^1X ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors le polynôme de Poincaré de f est de la forme :

$$(\star) \quad \Gamma_f(t) = (q_0 + q_1t + \dots + q_nt^n) + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1}),$$

où $q_k + q_{n-k}$ est le k -ième nombre de Betti de Λ , $q_0 = 0$, $q_n = 1$ et p satisfait :

$$p(t) := \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k,$$

avec tous les coefficients p_k qui sont des entiers naturels.

Si $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$ est un polynôme de Laurent satisfaisant (\star) , alors pour $n \geq 2$, il existe une sous-variété legendrienne connexe de $J^1\mathbb{R}^n$ ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini telle que $P(t) = \Gamma_f(t)$.

Concrètement, cela signifie que nous comprenons les obstructions à l'existence d'une isotopie legendrienne qui sont mesurées par l'homologie génératrice.

Notre lecteur ne devra pas s'en surprendre, nous avons jugé pertinent de plutôt énoncer les versions homologiques des résultats cohomologiques de l'article [5] de Frédéric Bourgeois, Joshua Sabloff et Lisa Traynor.

Nous ouvrons ce mémoire en fixant le cadre de la géométrie de contact, pour pouvoir ensuite aborder sereinement le contexte des familles génératrices². Ces notions clés étant dégagées, nous construisons et étudions l'homologie génératrice avant de démontrer la longue suite exacte de dualité annoncée. Dans le souci de ne pas allourdir ce document, nous avons relégué dans les annexes les notions nécessaires d'algèbre homologique et de théorie de Morse. Nous supposons néanmoins que notre lecteur est suffisamment familier avec la géométrie différentielle pour ne pas avoir à en rappeler les concepts de base qu'il trouvera dans le livre [16] de Jacques Lafontaine. Nous présentons dans notre dernière annexe des calculs d'homologie pour les familles génératrices, ces exemples illustrent les remarques parcemées dans notre mémoire.

Nous avons pris le parti de ne jamais détailler les calculs dans leur intégralité, mais plutôt d'indiquer les étapes et raisonnements clés pour les mener à bien. Nous sommes d'ailleurs convaincus qu'il est plus bénéfique pour notre lecteur de les reproduire, plutôt que de suivre bêtement des lignes de formules.

2. J'éprouve quelques regrets de ne pas avoir abordé ces sujets dans toute la profondeur qu'ils méritent, mais il était préférable de ne pas s'éloigner de nos préoccupations.

1. UN BREF APERÇU DE LA GÉOMÉTRIE DE CONTACT

Nous survolons les notions de géométrie de contact nécessaires à notre étude. L'ouvrage de référence pour cette partie est le livre [14] de Hansjörg Geiges.

Soit M une variété différentielle de dimension impaire $2n + 1$.

1.1. Les structures de contact.

Définition 1.1. Une *forme de contact* est une 1-forme différentielle α de M satisfaisant la condition de non dégénérescence $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Remarque 1.2. La forme bilinéaire alternée $d\alpha$ est non dégénérée sur $\ker(\alpha)$ ³, ce qui impose aux hyperplans $\xi := \ker(\alpha)$ de TM d'être de dimension paire.

Une forme de contact α permet de définir par dualité un champ de vecteurs :

Définition 1.3. Le *champ de Reeb* R_α de α est défini par les équations :

$$\alpha(R_\alpha) = 1, d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$$

Le champ R_α est transversal au champ des noyaux de α et dirige celui de $d\alpha$.

Remarque 1.4. Le flot du champ de Reeb préserve la forme de contact⁴.

Exemple 1.5. Sur \mathbb{R}^{2n+1} de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$, la forme

$$\alpha_{\text{std}} := dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$$

définit une forme de contact dont le champ de Reeb est donné par ∂_z .

Définition 1.6. Une *structure de contact* est un champ d'hyperplans $\xi \subset TM$ tangents localement donné par le noyau d'une forme de contact.

Remarque 1.7. La condition de contact étant invariante par multiplication par une fonction ne s'annulant pas, cette notion est correctement définie.

Exemple 1.8. La structure de contact standard de \mathbb{R}^{2n+1} est $\xi_{\text{std}} := \ker(\alpha_{\text{std}})$.

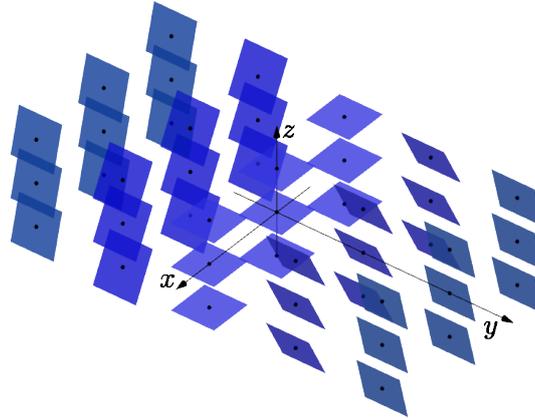


FIGURE 6. La structure de contact $\xi_{\text{std}} := \ker(dz - ydx)$ de \mathbb{R}^3 .

3. Quel que soit $p \in M$, l'application linéaire $d\alpha(p)|_{\xi_p} : \xi_p \rightarrow \xi_p^*$ est un isomorphisme.
 4. La formule de Cartan pour la dérivée de Lie donne $L_{R_\alpha} \alpha = \iota_{R_\alpha} d\alpha + d\iota_{R_\alpha} \alpha = 0$.

Remarque 1.9. Les structures de contact sont à l'opposé de l'intégrabilité⁵, leur définition est à rapprocher d'un théorème de Frobenius⁶ selon lequel le champ d'hyperplans $\ker(\alpha)$ est intégrable si, et seulement, si $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Les structures de contact apparaissent comme les champs d'hyperplans qui minimisent la dimension des sous-variétés qui leur sont partout tangentes.

Nous précisons désormais la notion de symétrie entre variétés de contact.

Définition 1.10. Un *contactomorphisme* est un difféomorphisme entre deux variétés de contact $\psi: (M_1, \xi_1) \rightarrow (M_2, \xi_2)$ qui satisfait $T\psi(\xi_1) = \xi_2$.

Exemple 1.11. Les structures de contact $\ker(dz - ydx)$ et $\ker(dz + xdy - ydx)$ sont contactomorphes et l'application $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z - \frac{xy}{2} \right)$$

est un contactomorphisme explicite entre ces deux structures de contact⁷.

La variété M est désormais munie d'une structure de contact ξ .

Définition 1.12. Un *champ de contact* est un champ de vecteurs dont le flot local est une *isotopie de contact*, il est constitué de contactomorphismes.

Exemple 1.13. Un champ de Reeb d'une variété de contact est de contact.

Nous évoquons enfin un théorème venant éclairer la citation de notre mémoire :

Théorème 1.14. Soit α une forme de contact de M satisfaisant $\xi = \ker(\alpha)$.

1. L'*hamiltonien de contact* d'un champ de contact X est $H_X := \alpha(X)$.
2. Il existe un unique champ de contact X_H satisfaisant les équations :

$$\alpha(X_H) = H, d\alpha(X_H, \cdot) = dH(R_\alpha)\alpha - dH,$$

où $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lisse.

Une correspondance bijective entre les champs de contact et les applications lisses de M dans \mathbb{R} est donnée par $X \mapsto H_X$ et $H \mapsto X_H$.

Remarque 1.15. Il faut penser à un hamiltonien de contact comme à une énergie et à un champ de contact comme à un gradient.

1.2. Les sous-variétés legendriennes.

Les *legendriennes* sont les sous-variétés partout tangentes à une structure de contact qui sont de dimension maximale pour cette propriété.

Définition 1.16. Une sous-variété $\Lambda \subset M$ de dimension n est une *legendrienne* dès qu'elle satisfait la condition de tangence $T\Lambda \subset \xi$.

La tension régnant entre les structures de contact et les legendriennes n'empêche pas ces sous-variétés d'être extrêmement abondantes.

5. Un champ d'hyperplans tangents est dit *intégrable* lorsqu'il provient d'hypersurfaces, c'est-à-dire qu'il est réalisé comme la réunion de leurs fibrés tangents.

6. Pour appliquer l'énoncé classique de ce théorème, il suffit de remarquer que pour tous champs de vecteurs X et Y de M , nous avons $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$.

7. Nous calculons facilement que $\psi^*(dz + xdy - ydx) = dz - ydx$, ce qui conclut.

Théorème 1.17. Si une sous-variété de M est de dimension n , alors elle peut être approximée en topologie C^0 par une sous-variété legendrienne.

Nous précisons la notion de déformation d'une sous-variété legendrienne :

Définition 1.18. Un chemin lisse $(j_t: L \hookrightarrow M)_{t \in [0,1]}$ de plongements de L est une *isotopie legendrienne* lorsque pour tout t , nous avons $Tj_t(L) \subset \xi$.

Nous utiliserons implicitement dans notre étude qu'une isotopie legendrienne compacte se prolonge toujours en une isotopie de contact.

Théorème 1.19. Soient L une sous-variété fermée de M et $(j_t: L \hookrightarrow M)_{t \in [0,1]}$ une isotopie legendrienne, alors il existe une isotopie de contact à support compact $(\psi_t: M \rightarrow M)_{t \in [0,1]}$ qui satisfait $j_t = \psi_t \circ j_0$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.20. Un chemin lisse de sous-variétés legendriennes est obtenu en suivant une sous-variété legendrienne fixée au cours d'une déformation globale de la variété de contact ambiante.

Nous supposons désormais que ξ est donnée par une forme de contact α .

Définition 1.21. Une *corde de Reeb* d'une sous-variété legendrienne Λ est une trajectoire non constante du champ de Reeb de α qui débute et aboutit sur Λ .

Nous verrons dans la partie 3 que les cordes de Reeb permettent d'encoder la géométrie de contact des sous-variétés legendriennes et d'en construire des invariants legendriens fins.

1.3. Les modèles locaux en géométrie de contact.

Soit X une variété, son *espace de premiers jets* est la variété $J^1X := T^*X \times \mathbb{R}$, nous notons aussi λ la forme de Liouville de T^*X .

Proposition 1.22. La forme $dz - \lambda$ définit une forme de contact de J^1X , son champ de Reeb est donné par ∂_z .

Nos espaces de premiers jets seront toujours munis de cette forme de contact.

Remarque 1.23. Une corde de Reeb d'une sous-variété legendrienne de J^1X est un segment vertical non réduit à un point parcouru de bas en haut.

Exemple 1.24. La variété de contact $J^1\mathbb{R}^n$ s'identifie à $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{\text{std}})$.

Les variétés de contact sont toutes localement « façonnées » sur le même modèle⁸.

Théorème 1.25 (Darboux). Une variété de contact de dimension $2n + 1$ est localement contactomorphe à l'espace de premiers jets $J^1\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.26. Il existe une version encore plus précise du théorème 1.25 : une forme de contact s'écrit localement comme α_{std} .

Une version semi-locale du théorème 1.25 subsiste encore au voisinage des sous-variétés legendriennes d'une variété de contact quelconque.

⁸. Les variétés de contact sont radicalement différentes des variétés riemanniennes qui, elles, possèdent des invariants locaux comme leur courbure.

Théorème 1.27. Soit Λ une sous-variété legendrienne d'une variété de contact, alors il existe un voisinage ambiant de Λ qui est contactomorphe à un voisinage de la section nulle de l'espace de premiers jets $J^1\Lambda$.

Seuls les phénomènes semi-locaux ou globaux sont susceptibles de restituer une information non triviale sur la géométrie des variétés de contact.

2. LES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES D'UN ESPACE DE PREMIERS JETS

Nous étudions les sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets, car d'après le théorème 1.27, ces variétés de contact modèlent toutes les autres au voisinage de leurs sous-variétés legendriennes.

Soit X une variété différentielle de dimension n .

2.1. Les projections lagrangiennes et frontales.

Les applications $\pi_{xy}: J^1X \rightarrow T^*X$ et $\pi_{xz}: J^1X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ sont définies par :

$$\begin{aligned}\pi_{xy}(x, y, z) &= (x, y), \\ \pi_{xz}(x, y, z) &= (x, z).\end{aligned}$$

où $(x, y, z) \in X \times T_x^*X \times \mathbb{R}$, il s'agit des projections *lagrangienne*⁹ et *frontale*.

Nous appelons *diagramme lagrangien*, respectivement *front legendrien*, d'une sous-variété legendrienne sa projection lagrangienne, respectivement frontale. Nous représenterons les fronts legendriens comme des graphiques (x, z) ayant les coordonnées selon X comme abscisses et la coordonnée selon \mathbb{R} en ordonnée.

Observons que si (x, y, z) est un paramétrage d'une sous-variété legendrienne, alors quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons l'égalité suivante :

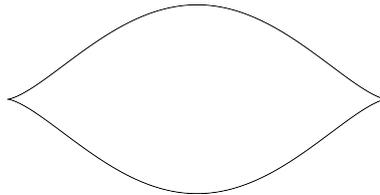
$$y_i = \frac{\partial x_i}{\partial z},$$

donc le front legendrien détermine uniquement la sous-variété legendrienne. Pour cette raison, nous utiliserons souvent les fronts legendriens pour décrire et visualiser les sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets.

Cette stratégie se révèle être particulièrement effective, puisque les sous-variétés legendriennes sont des objets de dimension n en dimension ambiante $2n + 1$, alors que leurs fronts vivent, eux, en dimension ambiante $n + 1$.

Exemple 2.1. Une sous-variété legendrienne de $(\mathbb{R}^3, \xi_{\text{std}})$ se « rapproche » de l'observateur quand les pentes de son front sont positives, alors qu'au contraire, elle s'en « éloigne » quand les pentes de son front sont négatives.

Nous définissons désormais S_{std}^n , la n -sphère legendrienne *standard* de $J^1\mathbb{R}^n$. Le front du cercle legendrien standard S_{std}^1 est représenté ci-dessous :



9. La projection lagrangienne L d'une sous-variété legendrienne donnée de J^1X est une sous-variété *lagrangienne* immergée de la variété *symplectique exacte* $(T^*X, d\lambda)$ i.e. $d\lambda|_L \equiv 0$.

Nous construisons par récurrence les autres sphères legendriennes standards. Si $q \mapsto (x_1(q), \dots, x_{n-1}(q), z(q))$ est un paramétrage local du front de S_{std}^{n-1} , alors un paramétrage local du front de S_{std}^n est donné par :

$$(q, \theta) \mapsto (x_1(q), \dots, x_{n-1}(q) \cos(\theta), x_n(q) \sin(\theta), z(q)).$$

Géométriquement, le front de S_{std}^n est obtenu par rotation complète autour du sous-espace $\{x_{n-1} = x_n = 0\}$ de la portion de front $\pi_{xz}(S_{\text{std}}^{n-1}) \cap \{x_{n-1} > 0\}$.

Exemple 2.2. Nous illustrons la construction de la 2-sphère legendrienne standard à partir du cercle legendrien standard.

Nous représentons tout d'abord la portion « droite » du front de S_{std}^1 .

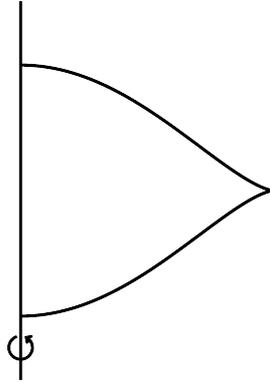


FIGURE 7. La portion $\pi_{xz}(S_{\text{std}}^1) \cap \{x > 0\}$ du front de S_{std}^1 .

Nous obtenons le front de S_{std}^2 en faisant tourner cette portion autour de l'axe z .

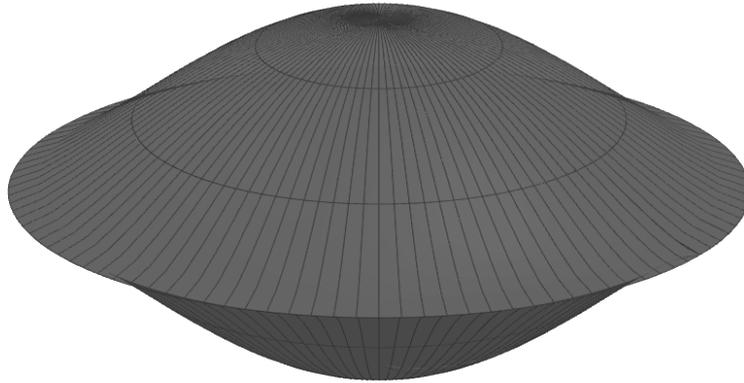


FIGURE 8. La projection frontale de $S_{\text{std}}^2 \subset J^1\mathbb{R}^2$.

Toutes les sphères legendriennes standards sont des sphères topologiques.

Exemple 2.3. Nous nous familiarisons avec les diagrammes lagrangiens et les fronts legendriens en considérant des exemples dans $J^1\mathbb{R}$.

Nous commençons par représenter le cercle legendrien standard.

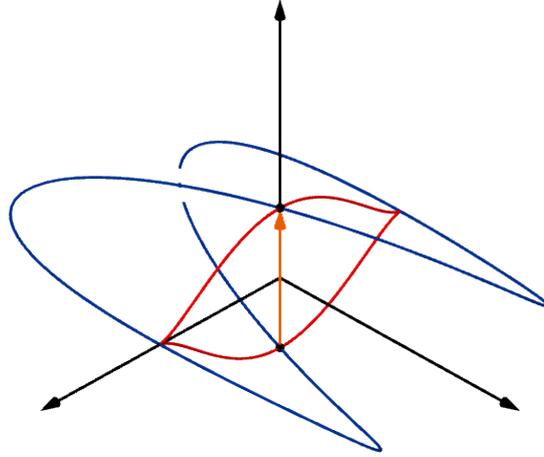


FIGURE 9. Le cercle legendrien standard $S^1_{\text{std}} \subset J^1\mathbb{R}$ (en bleu), son front (en rouge) et son unique corde de Reeb (en orange).

Nous représentons aussi le diagramme lagrangien et le front legendrien d'un nœud de trèfle legendrien.

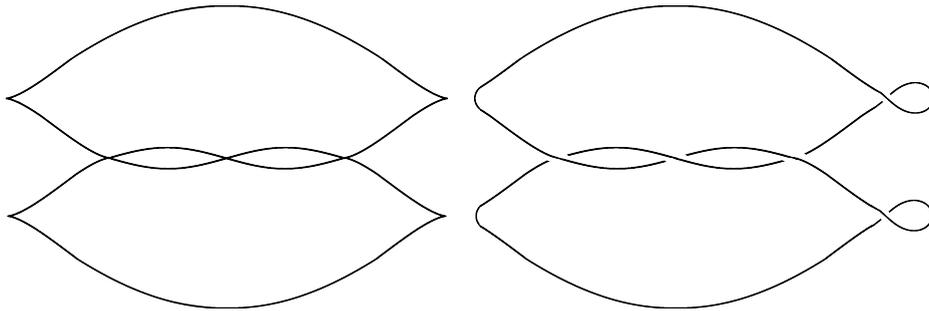


FIGURE 10. Un nœud de trèfle en projection frontale et lagrangienne.

Les diagrammes lagrangiens et les fronts legendriens permettent de détecter les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne :

Génériquement, les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne sont en correspondance bijective avec les points doubles de son diagramme lagrangien.

Exemple 2.4. Le diagramme lagrangien de S^1_{std} a un unique point double.

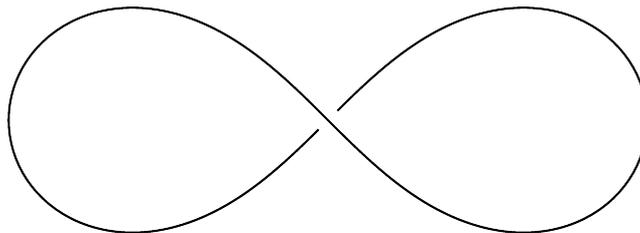


FIGURE 11. Le diagramme lagrangien de $S^1_{\text{std}} \subset J^1\mathbb{R}$.

Les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne sont en bijection avec les points verticalement alignés de son front qui ont les mêmes espaces tangents.

Exemple 2.5. Le front legendrien du cercle legendrien standard ne possède que deux points verticalement alignés ayant des tangentes parallèles.

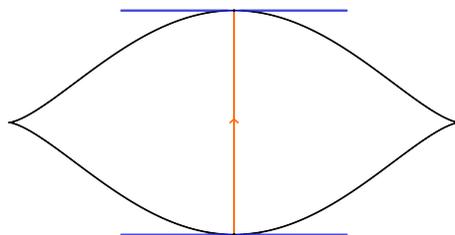


FIGURE 12. Le front de $S_{\text{std}}^1 \subset J^1\mathbb{R}$ et son unique corde de Reeb.

Les sphères legendriennes standards possèdent une unique corde de Reeb.

2.2. Les familles génératrices des sous-variétés legendriennes.

Nous décrivons certaines sous-variétés legendriennes à l'aide des points et des valeurs critiques d'une famille de fonctions $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 2.6. Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse, alors $j^1(f): X \rightarrow J^1X$ définie par :

$$j^1(f)(x) := ((x, T_x f), f(x))$$

est un plongement legendrien dont la projection frontale est le graphe de f .

Preuve. Par propriété fondamentale de la forme de Liouville, nous avons :

$$j^1(f)^*(dz - \lambda) = df - df^*\lambda = df - df = 0,$$

ce qui assure que l'image de j_f est une sous-variété legendrienne de J^1X . ■

Remarque 2.7. D'après le théorème 1.25 et la proposition 2.6, par un point d'une variété de contact passe une infinité de sous-variétés legendriennes.

Nous généralisons la construction de la proposition 2.6 en considérant le 1-jet dans la direction de X d'une fonction définie sur un fibré vectoriel de base X . Intuitivement, les fibres permettent de décrire des sous-variétés legendriennes ayant des points multiples au-dessus d'une même abscisse de leur front.

Notons x les coordonnées de X et e les coordonnées de \mathbb{R}^N .

Définition 2.8. Une fonction lisse $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une *famille génératrice* lorsque $\mathbf{0}$ est une valeur régulière de l'application $\partial_e f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$.

Remarque 2.9. Nous ne perdons pas de généralité à considérer seulement des fibrés vectoriels triviaux dans notre définition des familles génératrices. Nous serons de toute façon amené à rajouter des dimensions dans leurs fibres, ce qui finirait quand même par les rendre trivialisables.

Exemple 2.10. Une fonction lisse de X dans \mathbb{R} est une famille génératrice.

Le lieu fibrement critique Σ_f de f est la sous-variété $\partial_e f^{-1}(\mathbf{0})$ de dimension n . Nous définissons également l'immersion legendrienne¹⁰ engendrée par f comme l'application $j_f: \Sigma_f \looparrowright \mathbb{R}$ donnée en coordonnées locales par :

$$j_f(x, e) := ((x, \partial_x f(x, e)), f(x, e)).$$

Nous désignons finalement l'image¹¹ de l'immersion legendrienne j_f par Λ_f .

Remarque 2.11. Le front legendrien de Λ_f est constitué des $(x, e) \in X \times \mathbb{R}^N$, où e est un point critique de l'application $f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.12. Une sous-variété legendrienne Λ admet une famille génératrice lorsqu'il existe une famille génératrice f satisfaisant $\Lambda = \Lambda_f$.

Remarque 2.13. Une sous-variété legendrienne de J^1X admet une famille génératrice si, et seulement, si son front legendrien est un *diagramme de Cerf*¹².

Exemple 2.14. L'application $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t, e) = e^3 - 3t(1-t)e$$

est une famille génératrice¹³ du cercle legendrien standard de $J^1\mathbb{R}$, nous avons :

$$\Sigma_f = \left\{ \left(t, \sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ \left(t, -\sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\}$$

qui est composé de deux branches qui sont des graphes de fonctions.

Nous représentons le front de ce nœud legendrien et sa famille génératrice f .

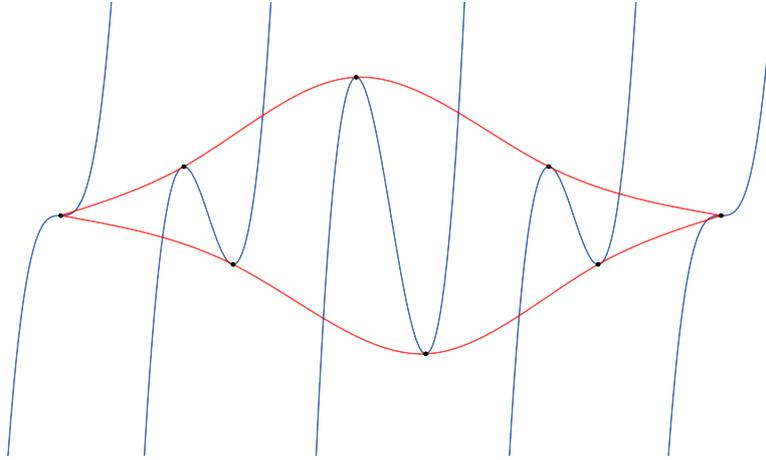


FIGURE 13. Le diagramme de Cerf (en rouge) de la famille f (en bleu).

Exemple 2.15. La famille génératrice de l'exemple 2.14 induit par rotation une famille génératrice de la sphère legendrienne standard de $J^1\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$.

Toutes les sous-variétés legendriennes n'admettent pas des familles génératrices, mais, dans notre étude, nous supposons que c'est toujours le cas.

10. C'est exactement la même preuve que celle de la proposition 2.6.

11. Nous insistons, l'image de j_f n'est pas nécessairement plongée!

12. Nous illustrons cette notion dans l'exemple suivant, voir [6] pour sa définition générale.

13. Le seul point critique de $\partial_e f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est $(1/2, 0)$ de valeur critique non nulle.

2.3. Vers la classification des sous-variétés legendriennes.

Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne en induit une infinité d'autres par modification à l'aide de deux opérations élémentaires.

Définition 2.16. Un difféomorphisme de $X \times \mathbb{R}^N$ est *fibré* lorsqu'il préserve globalement les niveaux $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ pour tout $x \in X$.

La précomposition d'une famille génératrice par un difféomorphisme fibré est une famille génératrice dont les points critiques ont été permutés fibre à fibre¹⁴.

Définition 2.17. Une *stabilisation* d'une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une application $f \oplus Q: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, e_1, e_2) = f(x, e_1) + Q(e_2),$$

où $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique non dégénérée.

La stabilisation d'une famille génératrice est une famille génératrice obtenue en rajoutant des dimensions dans les fibres de son domaine, le long desquelles elle varie quadratiquement¹⁵.

Définition 2.18. Des familles génératrices *équivalentes* diffèrent par une suite de précomposition par des difféomorphismes fibrés et par des stabilisations.

Remarque 2.19. Si deux familles génératrices sont équivalentes, alors elles engendrent la même sous-variété legendrienne¹⁶, la réciproque n'est pas vraie!

Nous clôturons cette section en énonçant un théorème qui justifie à lui seul la pertinence des familles génératrices dans le problème de classification des sous-variétés legendriennes des espaces de premiers jets.

Théorème 2.20 (Y. Chekanov, 1996, [7]). L'existence d'une famille génératrice persiste aux isotopies legendriennes et sa classe d'équivalence est préservée.

Remarque 2.21. Une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne qui subit une isotopie legendrienne est amenée à être stabilisée.

La remarque 2.19 et le théorème 2.20 motivent la définition 2.18.

14. C'est une conséquence de la règle de la chaîne.

15. Une forme quadratique non dégénérée possède un unique point critique, en l'origine, et sa valeur critique est nulle.

16. Si les difféomorphismes considérés n'étaient pas fibrés, cela ne serait plus vrai.

3. L'HOMOLOGIE POUR LES FAMILLES GÉNÉRATRICES

Nous construisons une homologie permettant de distinguer partiellement les classes d'équivalence des familles génératrices et avant d'en étudier plus en détails la structure, nous l'exploitons pour élaborer des invariants legendriens.

Soient X une variété de dimension n et $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice d'une sous-variété legendrienne Λ connexe.

3.1. La fonction différence d'une famille génératrice.

Nous introduisons une application nous permettant d'envisager la classification des sous-variétés legendriennes via celles de leurs familles génératrices.

Définition 3.1. La fonction différence $\delta: X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\delta(x, e_1, e_2) := f(x, e_1) - f(x, e_2).$$

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, nous notons δ^a le sous niveau $\delta^{-1}(] - \infty, a])$.

Remarque 3.2. Il nous sera utile d'observer que $\delta(x, e_1, e_2) = -\delta(x, e_2, e_1)$.

Les points critiques de la fonction différence portent une information cruciale sur la topologie et les cordes de Reeb de la sous-variété legendrienne Λ .

Proposition 3.3. Les points critiques de δ sont de deux types :

1. Les points critiques de δ de valeurs critiques strictement positives sont en correspondance bijective avec les cordes de Reeb de Λ .
2. L'ensemble des points critiques de δ de valeur critique nulle contient une unique sous-variété de $X \times \mathbb{R}^{2N}$, elle est difféomorphe à Λ .

Cette sous-variété critique est toujours non dégénérée et elle est d'indice N . Génériquement, ces points critiques sont aussi non dégénérés¹⁷.

Preuve. Nous calculons les dérivées partielles de δ au point (x, e_1, e_2) :

$$\begin{aligned} \partial_x \delta(x, e_1, e_2) &= \partial_x f(x, e_1) - \partial_x f(x, e_2), \\ \partial_{e_1} \delta(x, e_1, e_2) &= \partial_e f(x, e_1), \\ \partial_{e_2} \delta(x, e_1, e_2) &= \partial_e f(x, e_2). \end{aligned}$$

De ce calcul préliminaire, nous déduisons l'égalité suivante :

$$(1) \quad \text{Crit}(\delta) = \{(x, e_1, e_2) \mid (x, e_1), (x, e_2) \in \Sigma_f, \partial_x f(x, e_1) = \partial_x f(x, e_2)\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les affirmations de la proposition.

D'après la remarque 1.23 et l'égalité (1), (x, e_1, e_2) est un point critique de δ de valeur critique strictement positive si, et seulement, s'il existe une corde de Reeb de Λ joignant $(x, \partial_x f(x, e_1), f(x, e_1))$ à $(x, \partial_x f(x, e_2), f(x, e_2))$.

¹⁷. Leur indice s'exprime avec l'indice de Conley-Zehnder des cordes de Reeb, voir [18].

Par ailleurs, d'après l'égalité (1), nous observons que l'ensemble des points critiques de δ de valeur critique nulle contient l'ensemble suivant :

$$\{(x, e, e) \mid (x, e) \in \Sigma_f\}$$

qui est une sous-variété de $X \times \mathbb{R}^{2N}$ difféomorphe à Λ via $(x, e, e) \mapsto j_f(x, e)$. Un calcul¹⁸ montre que cette sous-variété critique est non dégénérée d'indice N .

L'affirmation sur la non dégénérescence des points critiques de δ de valeurs critiques strictement positives suit de la généralité des fonctions de Morse. ■

Remarque 3.4. D'après le lemme de Morse et la proposition 3.3, les cordes de Reeb d'une sous-variété legendrienne générique sont isolées.

La proposition 3.3 motive le développement d'un invariant pour les familles génératrices à partir de la théorie de Morse de leurs fonctions différences.

3.2. Un invariant homologique pour les familles génératrices.

Une majeure partie des résultats en homologie de Morse repose inévitablement sur la compacité des sous-niveaux des fonctions de Morse que l'on considère, nous invitons le lecteur à s'en convaincre en consultant les ouvrages [2] et [17]. Or, le domaine des fonctions différences n'est jamais compact, c'est ce qui nous contraints d'imposer le comportement à l'infini des familles génératrices.

Définition 3.5. La famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est *linéaire à l'infini* lorsqu'il existe $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle telle que :

$$f(x, e) = A(e)$$

pour tous les points (x, e) en dehors d'un compact de $X \times \mathbb{R}^N$.

Nous supposons désormais que la famille génératrice f est linéaire à l'infini, alors les valeurs critiques de δ forment un ensemble borné¹⁹ et symétrique. Nous choisissons maintenant $\omega > \varepsilon > 0$ de sorte que les valeurs critiques strictement positives de δ soient strictement comprises entre ε et ω .

Définition 3.6. L'*homologie génératrice* de f , notée $HG(f)$, est l'homologie relative des sous-niveaux ω et ε de sa fonction différence δ , nous avons :

$$HG_k(f) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

L'*homologie génératrice complète* de f , notée $\widetilde{HG}(f)$, est l'homologie relative des sous-niveaux ω et $-\varepsilon$ de sa fonction différence δ , nous avons :

$$\widetilde{HG}_k(f) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^{-\varepsilon}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

La *cohomologie génératrice* et la *cohomologie génératrice complète* de f sont définies en prenant les cohomologies relatives des mêmes sous-niveaux de δ avec la même graduation.

¹⁸. Il s'agit du lemme 6.1 de l'article [12] de Dmitry Fuchs et Dan Rutherford.

¹⁹. Une forme linéaire non nulle n'a pas de points critiques.

L'homologie génératrice (complète) de f provient du complexe $C(f)$ formé par les points critiques de δ de valeurs positives (ou nulle) muni de la graduation :

$$|p| := \text{ind}_p(\delta) - N - 1,$$

et l'application de bord de ce complexe est la différentielle de Morse usuelle. Nous reviendrons sur le choix de faire intervenir la dimension de la fibre du domaine de la famille génératrice f dans la graduation de ce complexe.

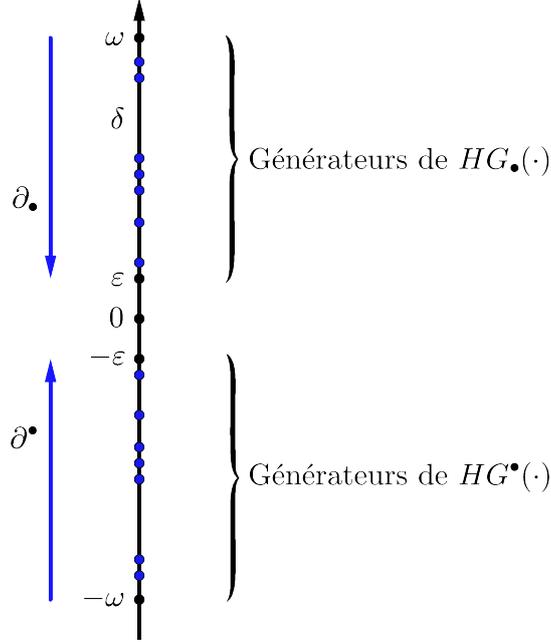


FIGURE 14. Calcul de l'homologie et de la cohomologie génératrice.

Remarque 3.7. Par un résultat standard de théorie de Morse (théorème C.16), cette homologie et cohomologie ne dépendent pas du choix des réels ω et ε .

La stabilisation d'une famille génératrice n'est jamais linéaire à l'infini et nos espoirs d'exploiter l'homologie génératrice pour distinguer partiellement les classes d'isotopie legendrienne semblent s'effondrer, cependant :

Proposition 3.8. La stabilisation d'une famille génératrice linéaire à l'infini l'est aussi après précomposition par un difféomorphisme fibré bien choisi.

Preuve. Soit $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice linéaire à l'infini, alors il existe une forme linéaire A non nulle de \mathbb{R}^N telle qu'en dehors d'un compact :

$$f(x, e) = A(e).$$

Nous considérons aussi $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, alors en dehors d'un compact, nous avons l'égalité suivante :

$$f \oplus Q(x, e, e') = A(e) + Q(e').$$

Soient \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^N , \mathcal{B}' la base antédual d'une base complétant A et B l'application linéaire dont la matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est l'identité.

Nous introduisons Φ le difféomorphisme fibré de $X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ défini par :

$$\Phi(x, e, e') := (x, B(e), e'),$$

de cette façon, pour les points (x, e, e') en dehors d'un compact, nous avons :

$$(f \oplus Q) \circ \Phi(x, e, e') = e_1 + Q(e').$$

Nous définissons alors l'application $g: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(e, e') = e_1 + Q(e')$ et il s'agit de construire un difféomorphisme Ψ de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ satisfaisant :

$$g \circ \Psi(e, e') = e_1.$$

Nous munissons $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k$ du produit scalaire standard, alors les trajectoires du gradient de g sont des droites qui intersectent transversalement et en un unique point l'hyperplan $\{e_1 = 0\}$, ce qui nous permet de construire :

$$\Psi^{-1}(e_1, \dots, e_N, e) = (g(e_1, \dots, e_N, e), e_2, \dots, e_N, e'),$$

où (e_1, \dots, e_N, e) et $(0, e_2, \dots, e_N, e')$ sont sur la même ligne du gradient de g . Le difféomorphisme recherché est donné par la composition $\Psi \circ \Phi$. ■

Remarque 3.9. La preuve est analogue au théorème de redressement des champs de vecteurs au voisinage d'un point régulier.

L'homologie génératrice est invariante par équivalence de familles génératrices.

Théorème 3.10. Si deux familles génératrices sont équivalentes, alors elles ont la même homologie génératrice.

Preuve. Si deux familles génératrices diffèrent d'un difféomorphisme fibré, alors elles ont la même homologie génératrice, c'est la même preuve que l'invariance de l'homologie de Morse par difféomorphisme (théorème C.27).

Soient $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice et δ sa fonction différence. Nous considérons aussi $Q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, alors d'après la proposition 3.8, ainsi que la première partie de cette preuve, nous supposons que $f \oplus Q$ est linéaire à l'infini de fonction différence notée δ' ²⁰. Dans ce contexte, nous montrons à l'aide d'un calcul direct que :

$$p := (x, e_1, e_2) \in \text{Crit}_{>0}(\delta) \iff p' := (x, e_1, 0, p, e_2, 0) \in \text{Crit}_{>0}(\delta').$$

De plus, pour tout point critique p de δ , nous avons $\text{ind}_{p'}(\delta') = \text{ind}_p(\delta) + k$, et nous en déduisons une bijection u respectant les graduations²¹ donnée par :

$$\begin{aligned} C(f) &\xrightarrow{u} C(f \oplus Q) \\ (x, e_1, e_2) &\mapsto (x, e_1, 0, e_2, 0). \end{aligned}$$

Soit g une métrique riemannienne sur $X \times \mathbb{R}^{2N}$ avec (δ, g) de Morse-Smale, nous prolongeons alors g en une métrique riemannienne g' sur $X \times \mathbb{R}^{2(N+k)}$ en utilisant le produit scalaire standard de \mathbb{R}^{2k} dans les dimensions stabilisées.

20. Pour tout $(x, e_1, e'_1, e_2, e'_2)$, nous avons $\delta'(x, e_1, e'_1, e_2, e'_2) = \delta(x, e_1, e_2) + Q(e'_1) - Q(e'_2)$.

21. C'est pour cela que la graduation employée dépend de la dimension de la fibre.

Soient p et q des points critiques de δ , alors avec les notations de l'annexe C, il vient que l'application u induit une bijection :

$$u: \mathcal{L}(p, q; \delta, g) \rightarrow \mathcal{L}(p', q'; \delta', g')$$

car le flot du champ $-\nabla\delta'$ explose linéairement dans les directions stabilisées. Finalement, (δ', g') est de Morse-Smale et u est un isomorphisme de complexes de chaînes, d'où l'invariance par stabilisation de l'homologie génératrice. ■

Nous exploitons désormais l'homologie génératrice pour construire une famille d'invariants par isotopie legendrienne des sous-variétés legendriennes.

Définition 3.11. Quel que soit $0 \leq k \leq n$, nous introduisons :

$$\mathcal{HG}_k(\Lambda) := \{HG_k(f); f \text{ famille génératrice linéaire à l'infini de } \Lambda\},$$

c'est l'ensemble d'homologie génératrice en degré k de Λ .

Théorème 3.12. L'ensemble $\mathcal{HG}_k(\cdot)$ est invariant par isotopie legendrienne.

Preuve. C'est une application directe des théorèmes 2.20 et 3.10. ■

Cependant, le nombre de cordes de Reeb **n'est pas** un invariant legendrien²² ! Nous invitons notre lecteur à consulter l'annexe D pour un contre-exemple.

Ces invariants sont encore difficilement exploitables, car l'ensemble des familles génératrices linéaires à l'infini d'une sous-variété legendrienne est mal compris.

Exemple 3.13. Les familles génératrices linéaires à l'infini du cercle legendrien standard sont équivalentes, voir [19] de Joshua Sabloff et Lisa Traynor²³.

3.3. La géographie de l'homologie pour les familles génératrices.

Nous supposons désormais que Λ est générique, compacte et connexe, alors d'après la proposition 3.3, l'homologie génératrice de f est de dimension finie. Nous cherchons maintenant à établir une relation de dualité entre l'homologie génératrice et la cohomologie correspondante.

Lemme 3.14. Les homologies $H_{\bullet+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ et $H_\bullet(\Lambda)$ sont isomorphes.

Preuve. En reprenant les notations de l'annexe C, d'après la proposition 3.3 et un résultat standard de théorie de Morse-Bott (théorème C.18), nous observons que le sous-niveau δ^ε est obtenu en recollant $E^u(\Lambda)$ sur $\delta^{-\varepsilon}$ le long de $\partial E^u(\Lambda)$. En particulier, quel que soit $0 \leq k \leq n$, nous avons un isomorphisme :

$$H_{k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) \cong H_{k+N}(E^u(\Lambda), \partial E^u(\Lambda)).$$

Or, par la proposition 3.3, $E^u(\Lambda) \rightarrow \Lambda$ est un fibré en disques de dimension N , ce qui permet de conclure avec l'isomorphisme de Thom (théorème C.34). ■

22. En effet, deux complexes de chaînes ayant un nombre de générateurs différents peuvent très bien avoir la même homologie, voir l'exemple C.26.

23. Le résultat y est montré pour les familles génératrices linéaires-quadratiques à l'infini. Cependant, la proposition 3.8 nous permet de conclure.

La suite exacte longue du triplet $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ (théorème C.33) et le lemme 3.14 permettent d'obtenir une suite exacte longue reliant l'homologie génératrice, l'homologie génératrice complète et l'homologie de la sous-variété legendrienne :

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(\Lambda) \rightarrow \widetilde{HG}_k(f) \rightarrow HG_k(f) \rightarrow \cdots .$$

Nous cherchons alors à identifier les modules d'homologie génératrice complète.

Lemme 3.15. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$ avec $-a < \omega$, il existe un isomorphisme :

$$\beta: H_\bullet(\delta^\omega, \delta^{-a}) \rightarrow H^{2N+n-\bullet}(\delta^a, \delta^{-\omega})$$

qui est induit par l'application $(x, e_1, e_2) \mapsto (x, e_2, e_1)$ de $X \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Preuve. Nous commençons par observer que pour tout choix de réels $a < b$, l'homologie relative $H(\delta^a, \delta^b)$ est celle du complexe de Morse $C(a, b)$ engendré par les points critiques de δ dont la valeur critique est comprise entre a et b . Dès lors, en reproduisant la preuve de la dualité de Poincaré (théorème C.29), nous constatons immédiatement que l'application suivante :

$$\begin{aligned} C(\omega, -a) &\rightarrow C(a, -\omega) \\ (x, e_1, e_2) &\mapsto (x, e_2, e_1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de complexes de chaînes, ce qui permet de conclure. ■

En utilisant le lemme 3.15 avec $a = \varepsilon$, il vient $\widetilde{GH}_k(f) \cong H^{n-k+N+1}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega})$.

Lemme 3.16. La paire $(\delta^\omega, \delta^{-\omega})$ est *acyclique*, son homologie s'annule.

Preuve. Comme f est linéaire à l'infini, il existe $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $\delta^c: X \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact telle que :

$$\delta(x, e_1, e_2) = \delta^c(x, e_1, e_2) + A(e_1) - A(e_2).$$

Nous introduisons $B: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $B(e_1, e_2) := A(e_1) - A(e_2)$ et nous observons²⁴ que les niveaux $\pm\omega$ restent réguliers au cours de l'homotopie :

$$s \mapsto s\delta^c + B.$$

Une version à un paramètre d'un résultat de théorie de Morse (théorème C.16) montre alors que $(\delta^\omega, \delta^{-\omega})$ et $(B^\omega, B^{-\omega})$ sont des rétracts par déformation, d'où :

$$(2) \quad H(\delta^\omega, \delta^{-\omega}) \cong H(B^\omega, B^{-\omega}).$$

Or, comme l'application B ne possède pas de points critiques, le théorème C.16 assure que les sous-niveaux B^ω et $B^{-\omega}$ sont des rétracts par déformation. En particulier, la paire $(B^\omega, B^{-\omega})$ est acyclique, ce qui conclut avec (2). ■

La suite exacte longue de cohomologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\omega})$ (théorème C.33) donne :

$$H^{k+N}(\delta^\omega, \delta^{-\omega}) \rightarrow H^{k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega}) \xrightarrow{\partial_k} H^{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) \rightarrow H^{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^{-\omega}).$$

Dès lors, d'après le lemme 3.16, l'application linéaire ∂ est un isomorphisme. En particulier, nous en déduisons que $\widetilde{GH}_k(f) \cong HG^{n-k-1}(f)$.

²⁴. Quitte à choisir une constante ω plus grande.

Nous sommes maintenant près à démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.17. Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors il existe une suite exacte longue :

$$(\star) \quad \cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f) \rightarrow \cdots .$$

De plus, les applications τ_k satisfont deux propriétés supplémentaires :

1. Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est l'isomorphisme de dualité de Poincaré, alors les applications $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.
2. L'application $\tau_n: HG_n(f) \rightarrow H_n(\Lambda)$ est surjective.

En particulier, l'espace vectoriel $HG_n(f)$ est de dimension au moins un.

Preuve. La suite exacte longue d'homologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ (théorème C.33), le lemme 3.14 avec la dualité de Poincaré, ainsi que le lemme 3.15 permettent de construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \xrightarrow{\tau_k} & H_{k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) & \xrightarrow{s_k} & H_{k+N}(\delta^\omega, \delta^{-\varepsilon}) & \xrightarrow{p_k} & H_{k+N}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \alpha \uparrow & & \downarrow \beta & & & & \\ & & H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) & \xleftarrow{s'_{n-k}} & H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega}) & & & & \\ & & & & \downarrow \partial_{n-k} & & & & \\ & & & & H^{n-k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) & & & & \end{array}$$

Les applications β et ∂ étant inversibles, nous introduisons les applications :

$$\begin{aligned} \rho_k &:= p_k \circ \beta^{-1} \circ \partial_{n-k}^{-1}: HG^{n-k}(f) \rightarrow HG_{k-1}(f), \\ \sigma_k &:= \partial_{n-k} \circ \beta \circ s_k: H_k(\Lambda) \rightarrow HG^{n-k}(f), \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir la suite exacte longue annoncée dans le théorème.

Pour établir la première propriété, nous commençons par observer que :

- La connexion de la suite exacte longue de cohomologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$ est duale²⁵ à la connexion de sa suite exacte longue d'homologie, τ .
- L'application s' est induite par l'inclusion i de $\delta^{-\omega}$ dans $\delta^{-\varepsilon}$ ²⁶.

Dès lors, les suites exactes longues de cohomologie de $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\omega})$ et $(\delta^\omega, \delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon})$, ainsi que le morphisme induit en cohomologie par l'application $(\text{id}_{\delta^\omega}, \text{id}_{\delta^\varepsilon}, i)$ permettent d'obtenir le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\omega}) & \xrightarrow{\partial_{n-k}} & H^{n-k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon) \\ \downarrow s'_{n-k} & & \downarrow \text{id} \\ H^{n-k+N}(\delta^\varepsilon, \delta^{-\varepsilon}) & \xrightarrow{\tau_{n-k}^*} & H^{n-k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon). \end{array}$$

25. Si les modules d'homologie n'étaient pas des espaces vectoriels, cela ne serait plus le cas.

26. Le théorème C.33 assure que l'application s est induite par l'inclusion de δ^ε dans δ^ω et c'est maintenant une conséquence de la dualité de Poincaré et du lemme 3.15.

Ainsi, en utilisant les deux diagrammes commutatifs de cette preuve, il vient :

$$\begin{aligned}
\sigma_k \circ \alpha &= (\partial_{n-k} \circ \beta \circ s_k) \circ \alpha, \\
&= (\tau_{n-k}^* \circ s'_{n-k}) \circ \beta \circ s_k \circ \alpha, \\
&= \tau_{n-k}^* \circ (s'_{n-k} \circ \beta \circ s_k) \circ \alpha, \\
&= \tau_{n-k}^*.
\end{aligned}$$

ce qui établit la première propriété du théorème.

La seconde propriété fait intervenir une légère extension de la machinerie usuelle de la théorie de Morse-Bott, nous choisissons de l'admettre.

La dernière affirmation est une conséquence de la connexité de Λ , de la dualité de Poincaré (théorème C.29) et de la seconde propriété du théorème. ■

Le théorème 3.17 permet de dégager des contraintes sur la structure des espaces vectoriels d'homologie génératrice, mais avant cela nous aurons besoin de :

Définition 3.18. Le *polynôme de Poincaré* de f est défini par :

$$\Gamma_f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(HG_k(f))t^k,$$

c'est un polynôme de Laurent à coefficients dans les entiers naturels.

Théorème 3.19. Soit Λ une sous-variété legendrienne connexe ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini, alors le polynôme de Poincaré de f est :

$$(\star\star) \quad \Gamma_f(t) = (q_0 + q_1t + \dots + q_nt^n) + p(t) + t^{n-1}p(t^{-1}),$$

où $q_k + q_{n-k}$ est le k -ième nombre de Betti de Λ , $q_0 = 0$, $q_n = 1$ et p satisfait :

$$p(t) := \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k,$$

avec tous les coefficients p_k qui sont des entiers naturels.

Preuve. Nous commençons par introduire les entiers naturels suivants :

$$\begin{aligned}
d_k &:= \dim(HG_k(f)), & b_k &:= \dim(H_k(\Lambda)), \\
p_k &:= \dim(\ker(\tau_k)), & q_k &:= d_k - p_k.
\end{aligned}$$

Tout d'abord, d'après la première propriété du théorème 3.17, des relations classiques de dualité²⁷ et le théorème du rang appliqué à τ_{n-k} , nous avons :

$$b_{n-k} = \dim(\ker(\sigma_k)) + q_{n-k}.$$

Or, en utilisant l'exactitude de la suite (\star) en $H_k(\Lambda)$ et en appliquant le théorème du rang à τ_k , nous établissons l'égalité suivante :

$$(3) \quad \dim(\ker(\sigma_k)) = q_k.$$

Finalement, par dualité de Poincaré (théorème C.29), nous avons montré que :

$$(4) \quad q_k + q_{n-k} = b_k.$$

²⁷. Si $u: E \rightarrow F$ est linéaire, alors $\ker(u^*) = \text{im}(u)^\perp$ et $\dim(\text{im}(u^\perp)) = \dim(F) - \text{rg}(u)$.

Nous allons maintenant établir que les p_k satisfont la relation de symétrie :

$$(5) \quad p_{n-k-1} = p_k.$$

Nous observons que l'exactitude de la suite (\star) en $HG_{n-k-1}(f)$ et $HG^k(f)$, ainsi que le théorème du rang appliqué à ρ_{n-k} impliquent l'égalité suivante :

$$p_{n-k-1} = d_k - \dim(\text{im}(\sigma_{n-k})).$$

Or, d'après (3), (4) et le théorème du rang appliqué à σ_{n-k} , il vient :

$$\dim(\text{im}(\sigma_{n-k})) = q_k,$$

ce qui permet bien d'établir l'égalité (5) que nous avons annoncée.

Nous remarquons enfin que puisque la sous-variété legendrienne Λ est connexe, la seconde propriété du théorème 3.17 et l'égalité (4) donnent $q_n = 1$ et $q_0 = 0$.

Nous utilisons les coefficients p_k et q_k pour définir les polynômes suivants :

$$p(t) := \sum_{k \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor} p_k t^k, \quad q(t) := \sum_{k=0}^n q_k t^k$$

Le théorème est maintenant une conséquence directe de (4) et (5)²⁸. ■

Remarque 3.20. Dans la preuve du théorème 3.19, nous avons utilisé :

$$\dim(HG_k(f)) = \dim(HG^k(f)),$$

car nous observons que l'homologie et la cohomologie génératrices proviennent de complexes de Morse dont les différentielles sont duales.

Remarque 3.21. Sans la seconde propriété supplémentaire du théorème 3.17, nous pouvons seulement conclure que $q_0 + q_n = 1$, mais pas $q_0 = 0$ et $q_n = 1$.

Dans l'article [5], Frédéric Bourgeois, Joshua Sabloff et Lisa Traynor montrent que le théorème 3.19 contient toute la structure de l'homologie génératrice :

Théorème 3.22. Si $P \in \mathbb{N}[t, t^{-1}]$ est un polynôme de Laurent satisfaisant $(\star\star)$, alors pour $n \geq 2$, il existe une sous-variété legendrienne connexe de $J^1\mathbb{R}^n$ ayant une famille génératrice f linéaire à l'infini telle que $P(t) = \Gamma_f(t)$.

La preuve consiste à construire²⁹ des sous-variétés legendriennes connexes qui possèdent des familles génératrices avec une homologie génératrice prescrite.

28. Nous recommandons d'établir l'égalité $(\star\star)$ de la droite vers la gauche, pour ce faire, il suffit de remarquer que $\dim(HG_k(f)) = p_k + q_k$ et que pour tout $k \geq n+1$, $q_k = 0$.

29. Les ingrédients clefs sont les remplissages, les rotations de fronts et les chirurgies.

CONCLUSION ET OUVERTURE

Afin d'aborder le problème de classification des sous-variétés legendriennes, deux grands types d'invariants algébriques, non classiques³⁰, sont exploités. Ces invariants s'inscrivent dans une même philosophie commune : dénombrer certaines trajectoires qui s'appuient sur des cordes de Reeb, mais ils reposent cependant sur des techniques mathématiques bien distinctes.

D'une part, la théorie de Morse-Bott-Cerf donne naissance aux invariants des sous-variétés legendriennes construits à partir des familles génératrices, parmi eux, citons l'homologie génératrice que nous avons étudiée dans ce mémoire.

Par ailleurs, la théorie de Fredholm permet quant à elle d'élaborer l'*homologie de contact legendrienne*, un invariant dont le lecteur trouvera la construction détaillée dans l'article [9] de Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan. Pour notre part, nous mentionnons seulement que son développement repose massivement sur l'utilisation des courbes pseudo-holomorphes³¹, introduites par Mikhaïl Gromov dans son article [15].

Ces invariants semblent bien différents, mais ils entretiennent des liens étroits :

Théorème (D. Fuchs, D. Rutherford, 2011, [12]). En dimension 3, l'homologie de contact legendrienne linéarisée et l'homologie génératrice sont équivalentes.

Il est d'ailleurs conjecturé que cette équivalence persiste en toute dimension. Nous sommes cependant encore relativement loin d'avoir établi ce résultat.

Malheureusement, l'homologie génératrice n'est pas un invariant complet : nous pouvons construire des familles génératrices non équivalentes pour une même sous-variété legendrienne qui possèdent la même homologie génératrice³².

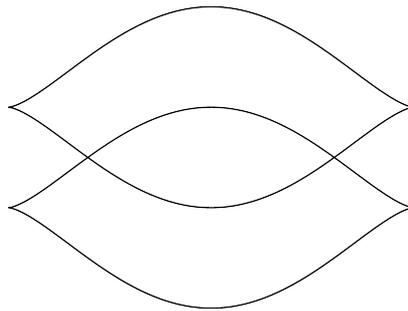


FIGURE 15. Un entrelacs de Hopf legendrien de $J^1\mathbb{R}$.

Cependant, nous contournons ces limitations en raffinant l'homologie génératrice.

30. Par opposition avec les nombres de rotation et de Thurston-Bennequin.

31. Une forme de contact détermine une structure presque-complexe sur son noyau.

32. C'est notamment le cas sur l'entrelacs de Hopf legendrien de $J^1\mathbb{R}$.

Une des approches possibles consiste à adapter l'homologie génératrice aux paires de familles génératrices, ainsi si f_1 et f_2 sont deux familles génératrices, nous définissons leur fonction différence comme suit :

$$\delta(x, e_1, e_2) := f_1(x, e_1) - f_2(x, e_2).$$

Lorsque les familles génératrices f_1 et f_2 sont linéaires à l'infini, nous définissons :

$$HG_k(f_1, f_2) := H_{k+N+1}(\delta^\omega, \delta^\varepsilon),$$

avec les valeurs critiques strictement positives de δ comprises entre ε et ω . Cette nouvelle homologie raffine effectivement l'homologie génératrice :

Théorème. Si f_1, f_2 sont équivalentes, alors $HG(f_1) = HG(f_1, f_2) = HG(f_2)$.

Quand ces familles génératrices engendrent une même sous-variété legendrienne, nous pouvons adapter les preuves de la proposition 3.3 et du théorème 3.17 :

Théorème. Si Λ est une sous-variété legendrienne connexe ayant des familles génératrices f_1 et f_2 linéaires à l'infini, alors nous avons la longue suite exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\tau_k} H_k(\Lambda) \xrightarrow{\sigma_k} HG^{n-k}(f_2, f_1) \xrightarrow{\rho_k} HG_{k-1}(f_1, f_2) \rightarrow \cdots$$

Si $\alpha: H^{n-k}(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda)$ est la dualité de Poincaré, $\sigma_k \circ \alpha$ et τ_{n-k} sont duales.

Cette dualité ne permet pas de généraliser directement le théorème C.29 au polynôme de Poincaré de la paire (f_1, f_2) , mais plutôt de dégager une relation entre les polynômes de Poincaré des paires (f_1, f_2) et (f_2, f_1) ³³.

La surjectivité de l'application $\tau_n: HG_n(f_1, f_2) \rightarrow H_n(\Lambda)$ n'est plus garantie³⁴. Durant un échange, Frédéric Bourgeois m'a confié être convaincu que :

Conjecture. La classe fondamentale de Λ provient de l'homologie $HG_n(f_1, f_2)$ si, et seulement, si les familles génératrices sont équivalentes³⁵.

L'homologie pour les paires de familles génératrices serait ainsi un invariant complet résolvant entièrement la classification des familles génératrices !

Pendant mon doctorat, j'envisage d'établir rigoureusement les résultats que nous avons ici esquissés sur l'homologie pour les paires de familles génératrices. Ces travaux s'inscrivent dans la volonté de rapprocher les invariants obtenus par familles génératrices et ceux déduits des courbes pseudo-homomorphes. En effet, cette homologie pour les paires de familles génératrices entretient sûrement des liens forts avec l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée, étudiée par Frédéric Bourgeois et Baptiste Chantraine dans leur article [4].

33. La suite exacte fait intervenir l'homologie de (f_1, f_2) et la cohomologie de (f_2, f_1) .

34. La sous-variété critique de δ de valeur critique nulle ne se trouve plus dans $X \times \Delta \mathbb{R}^{2N}$, c'est une différence majeure avec le contexte du théorème 3.17.

35. Quitte à raisonnablement généraliser la notion d'équivalence des familles génératrices, nous envisageons notamment de faire dépendre les stabilisations du point de la base.

ANNEXE A. LA FORME DE LIOUVILLE D'UN FIBRÉ COTANGENT

Soient M une variété et $\pi: T^*M \rightarrow M$ son fibré cotangent.

Définition A.1. La *forme de Liouville* λ de T^*M est la 1-forme définie par :

$$\lambda_p(v) = p(T_p\pi(v)),$$

où p est un élément de T^*M et v est un élément de T_pT^*M .

Exemple A.2. La forme de Liouville de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i dy_i,$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de la base et (y_1, \dots, y_n) celles de la fibre.

La forme de Liouville est *tautologique* et elle satisfait aussi la relation suivante :

Proposition A.3. Soit α une forme de degré 1 de M , alors $\alpha^*\lambda = \alpha$.

Preuve. Soit $q \in M$, alors par définition du tiré en arrière, nous avons :

$$(\alpha^*\lambda)(q) = \lambda(\alpha(q)) \circ T_q\alpha.$$

Dès lors, en utilisant la définition de λ , ainsi que la règle de la chaîne, il vient :

$$(\alpha^*\lambda)(q) = \alpha(q) \circ T_{\alpha(q)} \circ T_q\alpha = \alpha(q) \circ T_q(\pi \circ \alpha).$$

Or, α étant une section de π , nous avons $(\alpha^*\lambda)(q) = \alpha(q)$ et $\alpha^*\lambda = \alpha$. ■

Remarque A.4. Cette propriété est caractéristique de la forme de Liouville, ce que nous n'utiliserons pas dans ce mémoire.

ANNEXE B. UNE BOÎTE À OUTILS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Nous exposons les notions d'algèbre homologique utilisées dans ce mémoire.

B.1. Les anneaux et les modules gradués.

Définition B.1. Un anneau A est *gradué* lorsqu'il est somme directe d'une collection $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de groupes abéliens satisfaisant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, A_i A_j \subset A_{i+j}$$

Nous disons alors que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une *graduation* de l'anneau A .

Exemple B.2. L'anneau des polynômes multivariés est gradué par le degré.

Définition B.3. Un module M sur un anneau gradué A est *gradué* lorsqu'il est somme directe d'une collection $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de modules satisfaisant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, A_i M_j \subset M_{i+j}$$

Nous disons alors que $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une *graduation* du module M .

Exemple B.4. Un anneau gradué est un module gradué sur lui-même.

Si f est un endomorphisme d'un module gradué M , nous posons $f_\bullet := f|_{M_\bullet}$, où (M_\bullet) désigne la graduation de M .

B.2. Les complexes de chaînes et leurs homologies.

Définition B.5. Un *complexe de chaînes* (C, ∂) est un module gradué C muni d'un endomorphisme ∂ satisfaisant $\partial_0 = 0$, $\partial_\bullet : C_\bullet \rightarrow C_{\bullet-1}$ et $\partial_\bullet \circ \partial_{\bullet+1} = 0$. Les éléments de C sont les *chaînes* et ∂ est son *application de bord*.

Remarque B.6. La définition d'un complexe de cochaînes est analogue à celle d'un complexe de chaînes sauf que son application de cobord satisfait :

$$\partial^\bullet : C^{\bullet+1} \rightarrow C^\bullet, \partial^{\bullet+1} \circ \partial^\bullet = 0.$$

Un complexe de chaînes descend, alors qu'un complexe de cochaînes monte.

Toutes les notions et les résultats présentés ici s'étendent directement aux complexes de cochaînes en rajoutant le préfixe co-, en passant les indices en exposants et en inversant le sens des flèches.

Exemple B.7. L'anneau des formes différentielles³⁶ gradué par le degré et muni de la différentielle usuelle est un complexe de cochaînes.

Soit (C, ∂) un complexe de chaînes, son module $Z_\bullet(C, \partial)$ des *•-cycles* est :

$$Z_\bullet(C, \partial) := \ker(\partial_\bullet : M_\bullet \rightarrow M_{\bullet-1}),$$

nous définissons aussi son module $B_\bullet(C, \partial)$ des *•-bords* comme étant :

$$B_\bullet(C, \partial) := \text{im}(\partial_\bullet : M_\bullet \rightarrow M_{\bullet-1}).$$

Un bord d'un complexe de chaînes en est un cycle.

Exemple B.8. Les cocycles du complexe de cochaîne des formes différentielles sont les formes fermées et ses cobords sont les formes exactes.

³⁶. La loi multiplicative des formes différentielles est le produit extérieur.

Définition B.9. Un sous-module D d'un complexe de chaînes (C, ∂) est un *sous-complexe de chaînes* de (C, ∂) lorsque $(D, \partial|_D)$ est un complexe de chaînes.

Remarque B.10. Le sous-module D est un sous-complexe de chaînes de (C, ∂) si, et seulement, si ∂ stabilise D , à savoir $\partial_\bullet : D_\bullet \rightarrow D_{\bullet-1}$.

Un complexe de chaînes (C, ∂) est usuellement représenté comme suit :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0.$$

L'*homologie* d'un complexe de chaînes mesure alors son défaut d'exactitude.

Définition B.11. Soit (C, ∂) un complexe de chaînes, alors son *homologie* est le module gradué quotient $H(C, \partial)$ défini par :

$$H_\bullet(C, \partial) = Z_\bullet(C, \partial) / B_{\bullet+1}(C, \partial).$$

L'homologie de (C, ∂) quantifie l'obstruction d'un cycle à être un bord.

Exemple B.12. La cohomologie de De Rham est la cohomologie du complexe de cochaînes des formes différentielles.

Définition B.13. Un *morphisme* $f : (C_1, \partial_1) \rightarrow (C_2, \partial_2)$ est une application linéaire entre complexes de chaînes qui commutent à leurs différentielles :

$$f \circ \partial_1 = \partial_2 \circ f.$$

Nous étendons alors les notions d'algèbre linéaire aux complexes de chaînes.

Proposition B.14. Un morphisme induit une application linéaire entre tous les modules d'homologie des complexes de chaînes source et but.

Preuve. Un morphisme commute aux différentielles des complexes de chaînes, donc l'image d'un \bullet -bord est un \bullet -bord et l'image d'un \bullet -cycle est un \bullet -cycle, ce qui nous permet de conclure en passant le morphisme au quotient. ■

Ces applications induites sont encore notées de la même manière.

B.3. La suite exacte longue induite en homologie.

Le résultat suivant est fondamental en algèbre homologique :

Théorème B.15. Une suite exacte³⁷ courte $C_1 \xrightarrow{\alpha} C_2 \xrightarrow{\beta} C_3$ de complexes de chaînes induit une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H_k(C_1) \xrightarrow{\alpha} H_k(C_2) \xrightarrow{\beta} H_k(C_3) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(C_1) \rightarrow \cdots \xrightarrow{\beta} H_0(C_3)$$

entre les modules d'homologie de ces complexes de chaînes.

Preuve. En utilisant la proposition B.14, la seule difficulté est la construction de la *connexion* ∂ , et c'est une application directe du lemme du serpent³⁸. ■

Nous verrons deux applications de ce résultat dans l'annexe C, elle est consacrée à la construction de l'homologie (de Morse) d'une variété compacte.

37. Une suite $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ est *exacte* lorsque $\text{im}(u) = \ker(v)$.

38. Un résultat qui se résume seulement à suivre les flèches d'un diagramme commutatif.

ANNEXE C. UN TOUR D'HORIZON DE LA THÉORIE DE MORSE

Nous présentons brièvement les notions fondamentales de théorie de Morse, car dans ce mémoire, nous faisons un usage intensif de l'homologie éponyme. Les ouvrages de référence pour cette annexe sont [2], [17] et [20].

Soit M une variété différentielle et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse.

C.1. Les fonctions de Morse.

Soit p un *point critique* de f , c'est-à-dire que $T_p f: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle.

Définition C.1. La *hessienne* $\text{Hess}(f)_p$ de f au point p est définie par :

$$\forall X \in T_p M, \forall Y \in T_p M, \text{Hess}(f)_p(X, Y) := X \cdot (\tilde{Y} \cdot f)(p),$$

où \tilde{Y} est un champ de vecteurs de M étendant localement Y .

Remarque C.2. Si $p \in M$, $X \in T_p M$ et $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse, nous posons :

$$X \cdot g(p) := T_p g(X_p).$$

Il suffit que g soit définie au voisinage de p pour que cette définition fasse sens.

Proposition C.3. La hessienne de f en p est une forme bilinéaire symétrique.

Preuve. Quels que soient X et Y des vecteurs tangents à M en p , nous avons :

$$\text{Hess}(f)_p(X, Y) - \text{Hess}(f)_p(Y, X) = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot f(p) = T_p f \left([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \right) = 0,$$

ce qui assure aussi que la hessienne de f au point p est correctement définie, elle ne dépend pas du prolongement du vecteur tangent Y choisi. ■

Remarque C.4. Plus généralement, cette preuve montre que la hessienne est correctement définie sur le noyau de l'application tangente.

Définition C.5. Le point critique p est *non dégénéré* lorsque $\text{Hess}(f)_p$ l'est.

Exemple C.6. L'origine n'est pas un point critique non dégénéré de $x \mapsto x^3$.

Définition C.7. L'indice $\text{ind}_p(f)$ de f en un point critique p non dégénéré est la signature de la forme bilinéaire symétrique $\text{Hess}(f)_p$.

Remarque C.8. Géométriquement, $\text{ind}_p(f)$ est le nombre de directions issues du point p le long desquelles f décroît.

Exemple C.9. Un maximum est d'indice $\dim(M)$ et un minimum d'indice 0. Un point col/selle en dimension ambiante 2 est d'indice 1.

Définition C.10. Une *fonction de Morse* est une application lisse dont tous les points critiques non dégénérés.

Exemple C.11. La *hauteur* $(x, y, z) \mapsto z$ de S^2 , la sphère euclidienne de \mathbb{R}^2 , est une fonction de Morse possédant un point critique d'indice 2 au pôle Nord et un point critique d'indice 0 au pôle Sud.

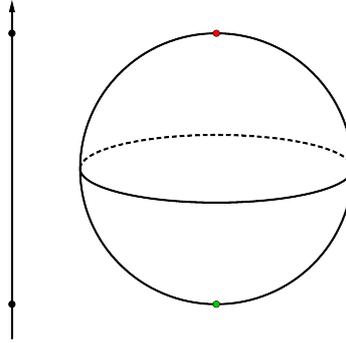


FIGURE 16. La fonction hauteur de la sphère euclidienne $S^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Les fonctions de Morse sont génériques³⁹, illustrons leur abondance par :

Théorème C.12. Si M est une sous-variété de \mathbb{R}^n , alors pour presque tout point $p \in \mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto \|x - p\|^2$ est une fonction de Morse.

Preuve. C'est une application du théorème de Sard⁴⁰. ■

Il existe un unique modèle local pour les points critiques d'indice fixé.

Théorème C.13. Si p est un point critique d'indice k de f , alors il existe une carte (x_1, \dots, x_n) de M centrée en p dans laquelle nous avons :

$$f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{j=k+1}^n x_j^2.$$

Les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés⁴¹.

Preuve. C'est une application de la formule de Taylor avec reste intégral, de la réduction des formes quadratiques et du théorème d'inversion locale. ■

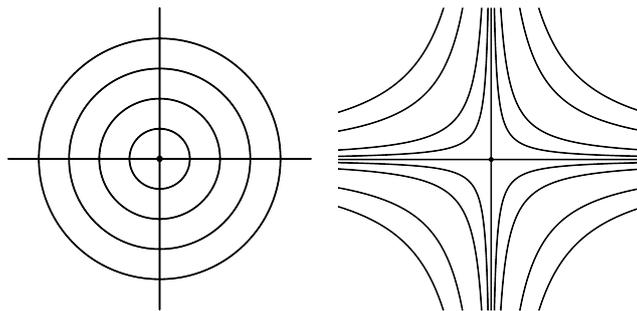


FIGURE 17. Un point critique d'indice 0 et 1 en dimension 2.

C'est un résultat central pour comprendre la topologie d'une variété compacte par l'évolution de la topologie des sous-niveaux d'une fonction de Morse.

39. Toute fonction lisse peut être approximée en topologie C^0 par une fonction de Morse.

40. L'ensemble des valeurs critiques d'une fonction lisse est *négligeable*.

41. Le nombre de points critiques d'une fonction de Morse d'une variété compacte est fini.

C.2. Les variétés stables et instables.

Soient g une métrique⁴² sur M et $(\phi_t)_t$ le flot de $-\nabla f$, l'antigradient⁴³ de f . Nous supposons que M est sans bord et que la fonction f est de Morse.

Le théorème C.13 assure que les trajectoires de l'opposé du gradient de f débutent et aboutissent sur des points critiques et nous pouvons introduire :

Définition C.14. La *variété stable* de p est formée des points de M qui sont joints à p , dans le futur⁴⁴, par une trajectoire de l'opposé du gradient de f :

$$W^s(p; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = p \right\}.$$

C'est une sous-variété de M dont la dimension est égale à $\dim(M) - \text{ind}_p(f)$. En contraste, la *variété instable* de p est formée des points de M qui sont joints à p , dans le passé⁴⁵, par une trajectoire de l'opposé du gradient de f :

$$W^u(p; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p \right\}.$$

C'est une sous-variété de M dont la dimension est égale à $\text{ind}_p(f)$.

Exemple C.15. Soient g la métrique riemannienne de S^2 induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^2 et $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction hauteur, alors nous avons :

$$\begin{aligned} W^s(p; f, g) &= \{p\}, W^u(p; f, g) = S^2 \setminus \{p\}, \\ W^s(q; f, g) &= S^2 \setminus \{p\}, W^u(q; f, g) = \{p\}, \end{aligned}$$

où p désigne le pôle Nord de S^2 et q son pôle Sud.

Nous supposons désormais que la variété M est compacte et pour tout réel a , nous notons f^a le sous-niveau $f^{-1}(] - \infty, a])$.

Sans passage de valeur critique, la topologie des sous-niveaux est inchangée.

Théorème C.16. Soient $a < b$ deux nombres réels tels que l'intervalle $[a, b]$ ne contient pas de valeurs critiques de f , alors f^a et f^b sont difféomorphes.

Preuve. Le difféomorphisme est donné par le flot au temps $b-a$ du champ $-\nabla f$, nous poussons f^b sur f^a le long des trajectoires du gradient de f . ■

Lorsqu'il y a franchissement d'une valeur critique, la situation est plus subtile. Nous notons n la dimension de la variété M et nous aurons besoin de :

Définition C.17. Soient V^n une variété à bord et $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \hookrightarrow \partial V$ un plongement, $k \leq n$, alors le résultat d'un *attachement d'une k -anse* sur V est :

$$W := V \cup_{\varphi} (D^k \times D^{n-k}),$$

où les points de $\partial D^k \times D^{n-k}$ sont identifiés à ceux de ∂V via le plongement φ . Autrement dit, la variété ∂W est obtenue par *chirurgie d'indice $k-1$* sur ∂V .

42. Quel que soit $x \in M$, g_x est un produit scalaire sur $T_x M$ et $x \mapsto g_x$ est lisse.

43. C'est l'unique champ qui vérifie $T_x f(v) = g_x(v, \nabla f(x))$, pour tous $x \in M$ et $v \in T_x M$.

44. Ils se rapprochent du point p sous l'action du flot de $-\nabla f$.

45. Ils s'éloignent du point p sous l'action du flot de $-\nabla f$.

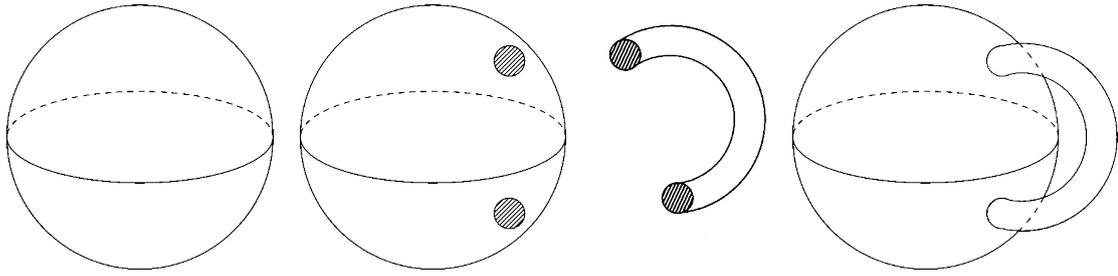


FIGURE 18. Un tore obtenu par chirurgie d'indice 0 sur la sphère.

Nous pouvons maintenant décrire l'évolution de la topologie des sous-niveaux d'une fonction de Morse lorsqu'il y a franchissement d'une valeur critique.

Théorème C.18. Soient p un point critique non dégénéré de f et $a := f(p)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-1}([a - \varepsilon, a + \varepsilon])$ ne contient pas de points critiques de f autre que a , alors $f^{a+\varepsilon}$ est homéomorphe à $f^{a-\varepsilon}$ avec une $\text{ind}_p(f)$ -anse attachée.

Exemple C.19. Les sous-niveaux de la hauteur sur le tore sont d'abord vide, puis un point, un disque, un cylindre, un tore troué et enfin le tore.

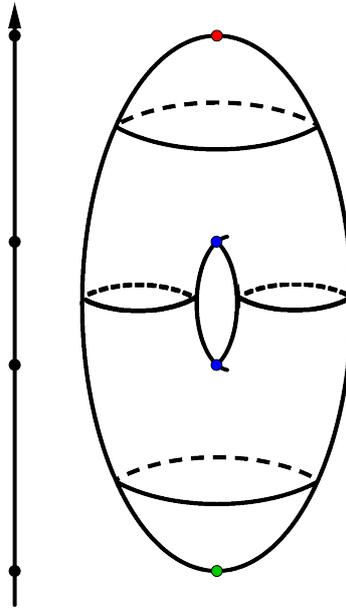


FIGURE 19. La topologie des sous-niveaux de la hauteur du tore.

Exemple C.20. Considérons un paysage de montagne inondé que l'on draine progressivement, quand le niveau de l'eau passe juste en-dessous d'un :

- sommet, il y a apparition d'une nouvelle composante dans le paysage,
- col, les deux composantes des sommets autour du col fusionnent.

Nous venons essentiellement de décrire le contenu du théorème C.18.

L'existence de fonctions de Morse et le théorème C.18 assurent que toutes les variétés compactes sont obtenues par attachements d'anses sur la boule.

C.3. Le complexe de Morse et son homologie.

La variété M étant compacte, il existe $\omega > 0$ satisfaisant $f^{-\omega} = \emptyset$ et $f^\omega = M$, alors les théorèmes C.16 et C.18 permettent de reconstruire M à partir de f . Une fonction de Morse est une sorte de plan de construction d'une variété.

L'objectif de l'homologie de Morse est d'encoder algébriquement la topologie de la variété qui portée par l'une de ses fonctions de Morse.

Génériquement, les variétés stables et instables s'intersectent transversalement.

Définition C.21. La paire (f, g) est de *Morse-Smale* lorsque nous avons :

$$W^s(p; f, g) \pitchfork W^u(q; f, g),$$

quels que soient les points critiques p et q de l'application f .

Exemple C.22. La paire (f, g) de l'exemple C.15 est de Morse-Smale.

Nous supposons que la paire (f, g) est de Morse-Smale, de sorte que l'ensemble des points qui se trouvent sur une trajectoire de $-\nabla f$ joignant p à q :

$$\mathcal{M}(p, q; f, g) := W^u(p; f, g) \cap W^s(q; f, g),$$

forment une sous-variété de M de dimension égale à $\text{ind}_p(f) - \text{ind}_q(f)$.

Le groupe \mathbb{R} des translations du temps agit librement⁴⁶ sur $\mathcal{M}(p, q; f, g)$ par :

$$s \cdot x := \varphi_s(x),$$

son quotient, noté $\mathcal{L}(p, q; f, g)$, est une sous-variété compacte de dimension :

$$\text{ind}_p(f) - \text{ind}_q(f) - 1$$

qui s'identifie à l'ensemble des trajectoires du champ $-\nabla f$ qui joignent p à q . Nous en déduisons que l'indice de Morse de f décroît le long des lignes de $-\nabla f$, car $\mathcal{L}(p, q; f, g)$ est non vide si, et seulement, si $\text{ind}_p(f) > \text{ind}_q(f)$.

Si $\text{ind}_p(f) = \text{ind}_q(f) + 1$, alors la sous-variété $\mathcal{L}(p, q; f, g)$ est de dimension 0 et comme elle est compacte, elle constituée d'un nombre fini de points, posons :

$$n(p, q; f, g) := \#\mathcal{L}(p, q; f, g) \bmod 2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'associer un complexe de chaînes à (f, g) .

Le module $C(f)$ engendré par les points critiques de f est gradué par l'indice :

$$C_k(f) = \text{Vect}(\{p \in \text{Crit}_k(f)\}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

où $\text{Crit}_k(f)$ désigne l'ensemble des points critiques d'indice k de la fonction f . Nous définissons aussi $\partial^{f,g}$ un endomorphisme de $C(f)$ par :

$$\partial_k^{f,g}(p) = \sum_q n(p, q; f, g)q,$$

quels que soient $k \in \{1, \dots, n\}$, $p \in \text{Crit}_k(f)$ et $q \in \text{Crit}_{k-1}(f)$.

⁴⁶ Il s'agit de l'action naturelle du sous-groupe à un paramètre donné par le flot de $-\nabla f$.

Théorème C.23. Le couple $C(f, g) := (C(f), \partial^{f,g})$ est un complexe de chaînes.

Preuve. Soient $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $p \in \text{Crit}_{k+1}(f)$, il s'agit de voir que :

$$\partial_k^{f,g} \circ \partial_{k+1}^{f,g}(p) = \sum_q \sum_r n(p, r; f, g) n(r, q; f, g) q = 0,$$

pour ce faire, nous montrons que pour tout $q \in \text{Crit}_{k-1}(f)$, nous avons :

$$\sum_r n(p, r; f, g) n(r, q; f, g) = 0.$$

Or, cet entier est le cardinal de la réunion disjointe sur $\text{Crit}_k(f)$ donnée par :

$$\coprod_r \mathcal{L}(p, r; f, g) \times \mathcal{L}(r, q; f, g),$$

cet ensemble est le bord d'une variété compacte de dimension un ⁴⁷ et à ce titre, il contient un nombre pair de points, ce qui conclut. ■

Définition C.24. L'homologie de Morse $HM(M)$ de la variété M est définie comme l'homologie du complexes de chaînes $(C(f), \partial^{f,g})$.

L'homologie de Morse de M ne dépend pas de la paire de Morse-Smale (f, g) . Il s'agit en fait de l'homologie singulière modulo 2 de la variété M .

La variété M étant compacte, ses modules d'homologie sont de dimension finie.

Définition C.25. Pour $0 \leq k \leq n$, le k -ième nombre de Betti de M est :

$$b_k(M) := \dim(HM_k(M)).$$

L'entier $b_k(M)$ compte les sous-variétés *indépendantes* de dimension k de M ⁴⁸.

Les *inégalités de Morse* assurent que le nombre de points critique d'indice k d'une fonction de Morse est minoré par le k -ième nombre de Betti.

Exemple C.26. Nous calculons l'homologie de Morse d'une noix de cajou S . Nous choisissons la hauteur de S comme fonction de Morse et la métrique riemannienne employée est induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

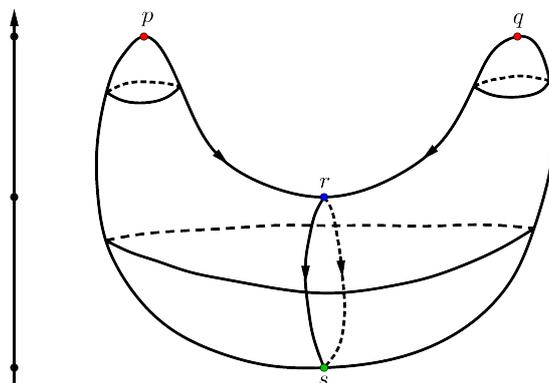


FIGURE 20. Le calcul de l'homologie de Morse de la noix de cajou.

47. Une variété compacte et connexe de dimension 1 est difféomorphe à S^1 ou $[0, 1]$.

48. L'entier $b_0(M)$ compte les composantes connexes de M .

Le complexe de Morse de cette paire est formé de deux points critiques p et q d'indice 2, d'un point critique r d'indice 1 et d'un point critique s d'indice 0. De plus, l'application de bord de ce complexe est donnée par :

$$\begin{aligned}\partial p &= r = \partial q, \\ \partial r &= 2s = 0, \\ \partial s &= 0.\end{aligned}$$

Nous en déduisons les égalités suivantes entre modules :

$$\begin{aligned}\ker(\partial_0) &= \langle s \rangle, \operatorname{im}(\partial_1) = \{0\}, \\ \ker(\partial_1) &= \langle r \rangle, \operatorname{im}(\partial_2) = \langle r \rangle, \\ \ker(\partial_2) &= \langle p + q \rangle, \operatorname{im}(\partial_3) = \{0\}.\end{aligned}$$

Finalement, l'homologie de Morse de S est donnée par :

$$HM_0(S) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, HM_1(S) = \{0\}, HM_2(S) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

ce qui se trouve aussi être l'homologie de Morse de la sphère S^2 de \mathbb{R}^2 .

L'homologie de Morse est un invariant de difféomorphisme de la variété.

Théorème C.27. Un difféomorphisme entre deux variétés fermées induit un isomorphisme entre leurs homologies de Morse.

Preuve. Soient $\varphi: M \rightarrow N$ difféomorphisme et $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse, alors φ^*f est une fonction de Morse sur M et d'après la règle de la chaîne :

$$(6) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, x \in \operatorname{Crit}_k(\varphi^*f) \iff \varphi(x) \in \operatorname{Crit}_k(f).$$

Soit g une métrique riemannienne de M telle que (φ^*f, g) est de Morse-Smale, alors φ_*g est une métrique riemannienne sur N pour laquelle nous avons :

$$\nabla(\varphi^*f) = \varphi^*\nabla f,$$

car quels que soient $x \in M$ et $v \in T_xM$, la règle de la chaîne nous donne :

$$g_x(v, (\varphi^*\nabla f)_x) = (\varphi_*g)_{\varphi(x)}(T_x\varphi(v), \nabla_{\varphi(x)}f) = T_x(\varphi^*f)(v).$$

Ainsi, les flots des champs de vecteurs $\nabla(\varphi^*f)$ et ∇f sont conjugués⁴⁹ par φ et nous en déduisons que le difféomorphisme φ induit une bijection :

$$(7) \quad \varphi: \mathcal{L}(p, q; \varphi^*f, g) \rightarrow \mathcal{L}(\varphi(p), \varphi(q); f, \varphi_*g).$$

Finalement, (f, φ_*g) est de Morse-Smale et d'après les points (6) et (7) :

$$\varphi: C(\varphi^*f, g) \rightarrow C(f, \varphi_*g)$$

est un isomorphisme de complexes de chaînes, ce qui permet de conclure. ■

Remarque C.28. Cet invariant n'est pas *complet*, certaines variétés non difféomorphes ont la même homologie de Morse, voir [1] de James Alexander.

La *cohomologie de Morse* $HM^\bullet(M)$ de M est l'homologie de Morse de $(-f, g)$.

⁴⁹. Si $(\phi_t)_t$ est le flot de ∇f , alors $(\varphi^{-1} \circ \phi_t \circ \varphi)_t$ est celui de $\nabla(\varphi^*f)$ (règle de la chaîne).

C.4. Des résultats structuraux de l'homologie de Morse.

La dualité de Poincaré permet de comprendre les modules gradués qui peuvent être réalisés comme l'homologie de Morse d'une variété fermée.

Théorème C.29. Si M est fermée de dimension n , alors pour tout $0 \leq k \leq n$, les espaces vectoriels $HM_k(M)$ et $HM^{n-k}(M)$ sont isomorphes.

Preuve. Soit (f, g) une paire de Morse-Smale, alors nous avons :

$$\text{Crit}_{n-k}(-f) = \text{Crit}_k(f).$$

Par ailleurs, pour des points critiques p et q de f , nous avons l'égalité suivante :

$$\mathcal{L}(p, q; f, g) = \mathcal{L}(q, p; -f, g).$$

Finalement, nous en déduisons que l'inclusion $C_\bullet(f, g) \rightarrow C_{n-\bullet}(-f, g)$ est un isomorphisme de complexes de chaîne, ce qui permet de conclure. ■

L'homologie de Morse en degré 0 d'une variété fermée connexe est cyclique, engendrée par la *classe du point*, alors par dualité de Poincaré, son homologie en degré maximal est aussi cyclique, engendrée par la *classe fondamentale*.

Les nombres de Betti sont *symétriques*, nous avons la relation suivante :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, b_k(M) = b_{n-k}(M),$$

c'est une contrainte structurelle sur les espaces vectoriels d'homologie de Morse.

Nous construisons maintenant l'homologie de Morse relative et nous établissons les suites exactes longues pour les paires et les triplets.

Soient W une sous-variété fermée de M et $i: W \hookrightarrow M$ l'inclusion.

Nous supposons désormais que $C(f|_W, g|_W)$ est un sous-complexe de $C(f, g)$.

Définition C.30. Le complexe de Morse *relatif* de (M, W) est défini par :

$$C_k(f, g; M, W) := C_k(f, g) / C_k(f|_W, g|_W),$$

où $C_k(f|_W, g|_W)$ est identifié avec son image par i dans $C_k(f, g)$.

Définition C.31. L'homologie de Morse *relative* $HM(M, W)$ de (M, W) est l'homologie du complexe de Morse relatif $C(f, g; M, W)$.

L'homologie de Morse relative de (M, W) ne dépend pas de la paire (f, g) .

Théorème C.32. L'inclusion de W dans M induit une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow HM_k(W) \rightarrow HM_k(M) \rightarrow HM_k(M, W) \rightarrow HM_{k-1}(W) \rightarrow \dots,$$

entre les modules d'homologie de Morse de W et M .

Preuve. L'inclusion i induit une suite exacte de complexe de chaînes :

$$C(f|_W, g|_W) \rightarrow C(f, g) \rightarrow C(f, g; M, W),$$

d'où le résultat d'après la suite exacte longue induite du théorème B.15. ■

Soient V une sous-variété fermée de W et $j: V \hookrightarrow W$ l'inclusion. Nous supposons désormais que $C(f|_V, g|_V)$ est un sous-complexe de $C(f|_W, g|_W)$.

Théorème C.33. Les inclusions i et j induisent une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow HM_k(W, V) \rightarrow HM_k(M, W) \rightarrow HM_k(M, V) \rightarrow HM_{k-1}(W, V) \rightarrow \cdots,$$

entre les modules d'homologie de Morse de V , W et M .

Preuve. Les inclusions i et j induisent une suite exacte de complexe de chaînes :

$$C(f|_V, g|_V; W, V) \rightarrow C(f|_W, g|_W; M, W) \rightarrow C(f|_V, g|_V; M, V),$$

d'où le résultat d'après la suite exacte longue induite du théorème B.15. ■

Nous énonçons enfin un résultat structural sur l'homologie d'un fibré en disques relativement à son bord, il s'agit de l'isomorphisme de Thom.

Théorème C.34 (R. Thom, 1954, [21]). Si $E \rightarrow B$ est un fibré en disques de dimension N au-dessus d'une variété compacte B de dimension n , alors pour tout $0 \leq k \leq n$, les modules $HM_k(B)$ et $HM_{k+N}(E, \partial E)$ sont isomorphes.

Sous couvert d'hypothèses techniques d'orientabilité, nous pouvons aussi définir une homologie de Morse à coefficients dans \mathbb{Z} et tous les résultats énoncés dans cette annexe restent encore valables.

C.5. Quelques mots sur la théorie de Morse-Bott.

Dans la plupart des situations importantes⁵⁰, un groupe G de Lie agit sur M et la fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est G -invariante⁵¹, ce qui semble permettre de décrire la topologie de l'espace homogène M/G à partir de f .

Cependant, la fonction f n'est généralement pas de Morse, car son ensemble critique est G -invariant et il est typiquement formé de sous-variétés critiques. Nos espoirs semblent alors s'effondrer.

Exemple C.35. La fonction hauteur du tore est invariante par l'action de S^1 donnée par la rotation autour de l'axe z , son ensemble critique est formé de deux cercles horizontaux.

La théorie de Morse-Bott est une adaptation de la théorie de Morse pour les fonctions dont l'ensemble critique est formé de sous-variétés ([3]).

Soient N une sous-variété critique de f et $\nu(N) \rightarrow N$ son fibré normal⁵².

Définition C.36. La sous-variété N est *non dégénérée* lorsque pour $x \in N$, la hessienne de f en x est non dégénérée en restriction à $\nu(N)_x$ ⁵³.

Nous supposons que N est une sous-variété critique connexe et non dégénérée.

50. Il s'agit des situations où la variété M possèdent de nombreuses symétries.

51. Quels que soient $x \in M$ et $g \in G$, nous avons $f(g \cdot x) = f(x)$.

52. Pour $x \in N$, nous avons $\nu(N)_x := (T_x N)^\perp$, où l'orthogonal est pris par rapport à g_x .

53. Il est équivalent de demander que $\ker(\text{Hess}(f)_x) = T_x N$.

Définition C.37. Soit $x \in N$, l'*indice* de N est la signature de $\text{Hess}(f)_{x|\nu(N)_x}$.

Remarque C.38. La valeur de $\text{ind}_f(N)$ ne dépend pas du point $x \in N$ choisi, car $x \mapsto \text{sgn}(\text{Hess}(f)_{x|\nu(N)_x})$ est continue et N est connexe.

Définition C.39. Une fonction est de *Morse-Bott* lorsque ses points critiques forment une réunion disjointe de sous-variétés critiques non dégénérées.

Exemple C.40. Une fonction de Morse est une fonction de Morse-Bott dont les sous-variétés critiques sont de dimension 0.

Une version paramétrique du théorème C.13 fournit directement un résultat analogue au lemme de Morse pour les fonctions de Morse-Bott.

Ainsi, les trajectoires de l'opposé du gradient d'une fonction de Morse-Bott commencent et aboutissent sur des sous-variétés critiques, nous introduisons :

Définition C.41. Le *fibré stable* de N est constitué des points de M qui aboutissent sur N sous l'action du flot de l'opposé du gradient de f :

$$E^s(N; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) \in N \right\}.$$

C'est un fibré en disques de dimension $\dim(M) - \text{ind}_N(f)$ au-dessus de N ⁵⁴. Le *fibré instable* de N est constitué des points de M qui s'éloignent de N sous l'action du flot de l'opposé du gradient de f :

$$E^u(N; f, g) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) \in N \right\}.$$

C'est un fibré en disques de dimension $\text{ind}_N(f)$ au-dessus de N ⁵⁵.

Les théorèmes C.16 et C.18 s'étendent aux fonctions de Morse-Bott.

54. La fibre au dessus de $p \in N$ est $W^s(p; f, g)$.

55. La fibre au dessus de $p \in N$ est $W^u(p; f, g)$.

ANNEXE D. DEUX CALCULS EXPLICITES D'HOMOLOGIE GÉNÉRATRICE

Dans cette annexe, nous calculons l'homologie de deux familles génératrices du cercle legendrien standard dont l'un d'eux possède plus d'une corde de Reeb.

Nous utiliserons la proposition 3.3 sans y faire mention.

D.1. Le cercle legendrien standard usuel.

Nous introduisons $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la famille génératrice de S_{std}^1 définie par :

$$f_1(t, e) = e^3 - 3t(1 - t)e,$$

en utilisant une fonction plateau, nous supposons que f_1 est linéaire à l'infini. Nous observons que sa fonction différence δ_1 possède un unique point critique de valeur critique strictement positive, noté p , c'est un maximum (indice 2). La situation est décrite sur la figure suivante :

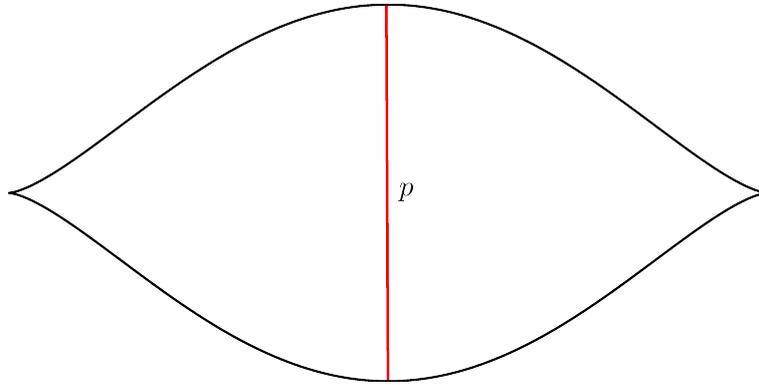


FIGURE 21. Le front de S_{std}^1 et l'unique point critique de δ_1 .

Finalement, nous en déduisons que $HG(f_1)$ est cyclique concentrée en degré 1 et avec les notations du théorème 3.19, il vient $\Gamma_{f_1}(t) = t$, $q(t) = t$ et $p(t) = 0$.

D.2. Une déformation du cercle legendrien standard.

Nous considérons L le nœud legendrien dont le front est représenté ci-dessous :

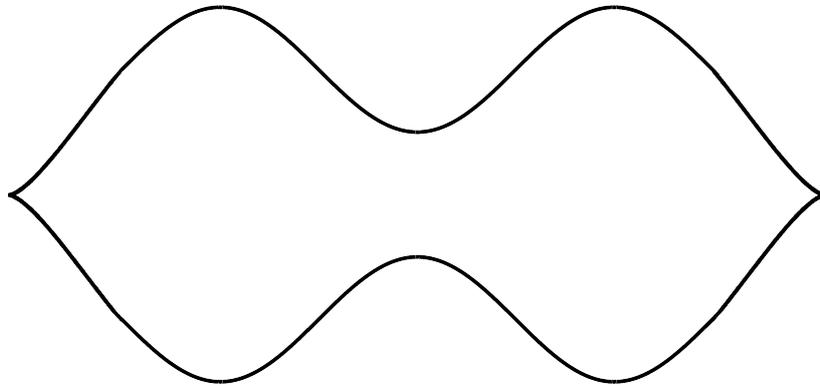


FIGURE 22. Un autre front du cercle legendrien standard.

Nous constatons alors que les fronts de L et S_{std}^1 sont régulièrement homotopes, de cette façon, ces deux nœuds legendriens sont legendriennement isotopes⁵⁶.

Soit f_2 la famille génératrice obtenue par isotopie legendrienne⁵⁷ à partir de f_1 , alors d'après les théorèmes 2.20 et 3.10, les familles génératrices f_1 et f_2 ont la même homologie, c'est ce que nous allons vérifier explicitement.

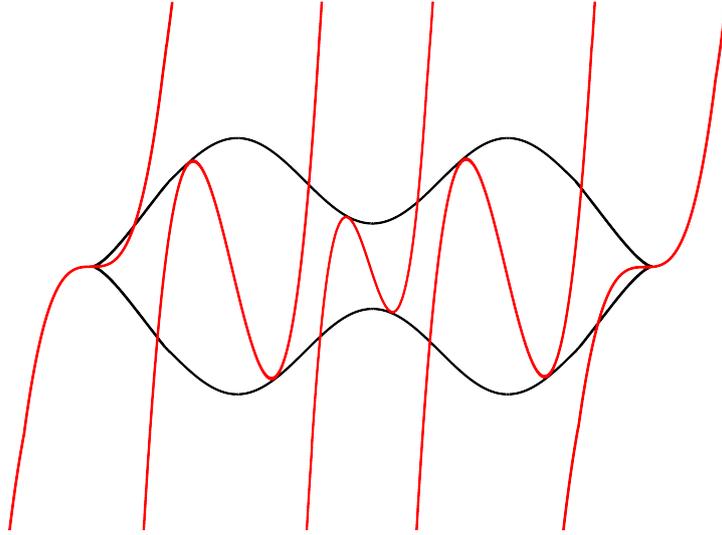


FIGURE 23. La famille génératrice f_2 .

La fonction différence δ_2 de la famille génératrice f_2 possède exactement trois points critiques de valeurs critiques strictement positives :

- les points p et q qui sont des maxima (indice 2),
- et le point r qui est un point col (indice 1).

La situation est décrite sur la figure suivante :

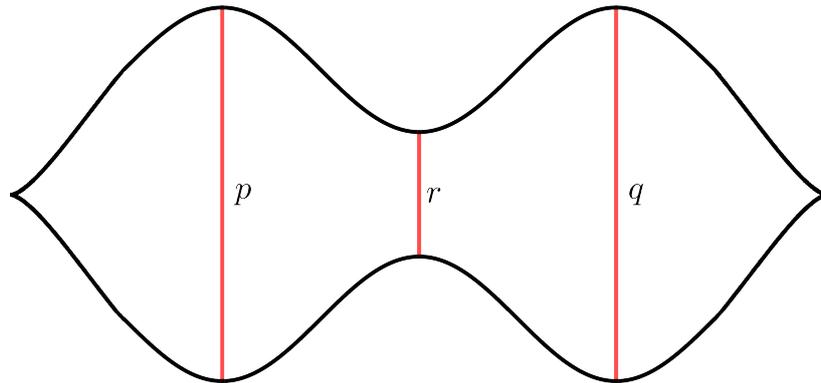


FIGURE 24. Les points critiques de δ_2 .

⁵⁶. Une homotopie régulière entre deux fronts se relève en une isotopie legendrienne.

⁵⁷. Cette isotopie legendrienne provient d'une homotopie régulière entre les deux fronts, ainsi, il n'est pas nécessaire de stabiliser la famille génératrice f_1 pour obtenir f_2 .

Le complexe de Morse formé par les points critiques de δ_2 de valeurs critiques strictement positives est le suivant :

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})p \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})q \xrightarrow{\partial} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})r \rightarrow 0.$$

Si par l'absurde $r \notin \text{im}(\partial)$, alors le polynôme de Poincaré de f_2 est donné par :

$$\Gamma_{f_2}(t) = 1 + 2t,$$

et d'après le théorème 3.19, il existe aussi un polynôme p satisfaisant l'égalité :

$$p(t) + p(t^{-1}) = 1 + t,$$

ce qui est impossible, ainsi nous avons donc établi que r est dans l'image de ∂ . Or, par symétrie axiale du front de L , les trajectoires du gradient⁵⁸ de δ_2 qui joignent les points p et r correspondent à celles qui joignent q et r , donc :

$$\partial p = r = \partial q.$$

Finalement, nous en déduisons que $HG(f_2)$ est cyclique⁵⁹ concentrée en degré 1, ce qui est aussi l'homologie de la famille génératrice f_1 .

D.3. Observations et conséquences.

Le nombre de cordes de Reeb n'est pas invariant par isotopie legendrienne, nous venons, en effet, d'exhiber deux cercles legendriens standards possédant respectivement une seule et trois cordes de Reeb.

D'ailleurs, en rajoutant des bosses et des creux au front de la figure 22, nous construisons un cercle legendrien standard possédant $2k + 1$ cordes de Reeb et ce quel que soit l'entier $k \geq 1$ choisi.

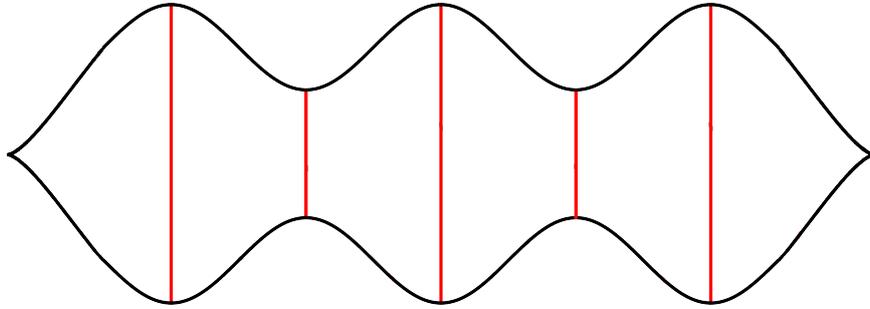


FIGURE 25. Un cercle legendrien standard avec cinq cordes de Reeb.

Nous avons aussi observé que, même pour des sous-variétés legendriennes extrêmement simples, le calcul direct de l'homologie génératrice sur le front legendrien est délicat⁶⁰. Pour contourner cette difficulté, nous avons dû mener un raisonnement combinatoire au niveau du complexe de chaînes sous-jacent. C'est l'une des principales limitations de l'homologie génératrice.

58. La métrique riemannienne de \mathbb{R}^3 est celle donnée par son produit scalaire standard.

59. Un générateur est donné par la classe d'équivalence de $p + q$.

60. Les trajectoires du gradient de la fonction différence ne se visualisent pas sur le front.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Alexander. Note on two three-dimensional manifolds with the same group. *Transactions of the American Mathematical Society*, 20 :339–342, 1919.
- [2] M. Audin et M. Damian. *Théorie de Morse et Homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.
- [3] R. Bott. Lectures on Morse theory, old and new. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(2) :331–358, 1982.
- [4] F. Bourgeois et B. Chantraine. Bilinearised Legendrian contact homology and the augmentation category. *Journal of Symplectic Geometry*, 12(3) :553–583, 2014.
- [5] F. Bourgeois, J. Sabloff, et L. Traynor. Lagrangian cobordisms via generating families : Construction and geography. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(4) :2439–2477, 2015.
- [6] J. Cerf. *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), volume 53 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1968.
- [7] Y. Chekanov. Critical points of quasifunctions and generating families of Legendrian manifolds. *Functional Analysis and Its Applications*, 30(2) :118–128, 1996.
- [8] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Inventiones mathematicae*, 150 :441–483, 2002.
- [9] T. Ekholm, J. Etnyre, et M. Sullivan. Non-isotopic Legendrian submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1} . *Journal of Differential Geometry*, 71(1) :85–128, 2005.
- [10] Y. Eliashberg et M. Fraser. Topologically trivial Legendrian knots. *Journal of Symplectic Geometry*, 7(2) :77–127, 2009.
- [11] D. Fuchs. Maslov-Arnold characteristic classes. *Soviet Mathematics Doklady*, 9 :96–99, 1968.
- [12] D. Fuchs et D. Rutherford. Generating families and legendrian contact homology in the standard contact space. *Journal of Topology*, 4 :190–226, 2011.
- [13] H. Geiges. A brief history of contact geometry and topology. *Expositiones Mathematicae*, 19(1) :25–53, 2001.
- [14] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [15] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 82 :307–347, 1985.
- [16] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.
- [17] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [18] J. Sabloff et Lisa Traynor. Obstructions to Lagrangian cobordisms between Legendrians via generating family. *Algebraic & Geometric Topology*, 13(5) :2733–2797, 2013.
- [19] J. Sabloff et L. Traynor. Generating family invariants for legendrian links of unknots. *Algebraic & Geometric Topology*, 6(2) :895–933, 2006.
- [20] M. Schwarz. *Morse Homology*. Birkhäuser Basel, 1993.
- [21] R. Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28 :17–86, 1954.
- [22] L. Traynor. Generating function polynomials for Legendrian links. *Geometry & Topology*, 5(2) :719–760, 2001.