

---

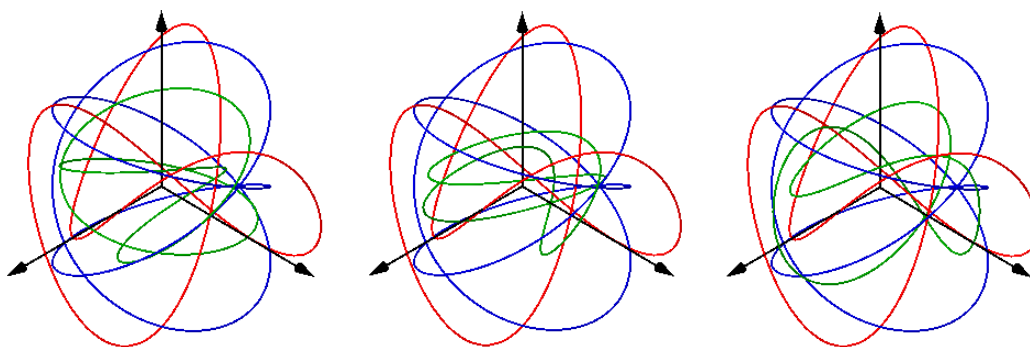
TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE  
Préparation de l'agrégation

---

**SUR LA CLASSIFICATION DES IMMERSIONS DU CERCLE  
DANS LES ESPACES EUCLIDIENS**

Cyril FALCON

RÉSUMÉ. Pour  $n \geq 1$ , on dégage des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux immersions de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^n$  soient régulièrement homotopes. Géométriquement, il s'agit de classifier à déformation régulière près les courbes lisses fermées de  $\mathbb{R}^n$ . Les méthodes employées sont à l'origine de l'intégration convexe et du principe homotopique.



Sous la direction de : Anne VAUGON



À la mémoire de Marcel BERGER,



## TABLE DES MATIÈRES

Remerciements.....	6
Introduction et motivations.....	7
Notations et conventions.....	10
1. Les immersions unidimensionnelles du cercle.....	11
2. Les immersions bidimensionnelles du cercle.....	12
2.1. Une première manifestation d'un $h$ -principe 1-paramétrique ...	12
2.2. Les composantes connexes par arcs de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ ....	18
2.3. Le théorème de Whitney-Grauert.....	19
3. Les immersions du cercle dans les dimensions supérieures.....	24
Annexe A. Sur les paramétrages normaux d'un arc régulier.....	29
A.1. Longueur et abscisses curvilignes d'un arc régulier.....	29
A.2. Paramétrages normaux d'un arc régulier.....	30
Annexe B. Petit glossaire des variétés différentielles.....	32
B.1. Notions de cartes, atlas et variétés.....	32
B.2. Sur les espaces tangents d'une variété différentielle.....	34
B.3. Applications différentiables entre variétés différentielles.....	37
Annexe C. La genericité dans les variétés différentiables.....	40
C.1. Ensembles négligeables d'une variété différentiable.....	40
C.2. Valeurs régulières, critiques et théorème de Sard.....	43
Annexe D. Un peu de topologie algébrique élémentaire.....	44
D.1. Homotopies d'applications continues.....	44
D.2. Ensembles d'homotopie, applications induites et revêtements .	47
D.3. Degré d'une application continue du cercle dans le cercle.....	51
Références.....	55

## REMERCIEMENTS

Je souhaite en tout premier lieu remercier chaleureusement Anne VAUGON, ainsi que lui témoigner mon entière reconnaissance pour avoir accepté de superviser mon stage recherche. Je salue tout particulièrement la qualité de son encadrement : ses remarques et ses conseils se sont toujours avérés être véritablement éclairants et d'une réelle pertinence, notamment lorsque je me trouvais dans l'impasse.

En outre, je lui exprime ma profonde gratitude pour m'avoir laissé une liberté totale dans l'élaboration de ce mémoire ; j'avais tout le loisir d'explorer le sujet proposé comme bon me semblait. J'ose espérer qu'il s'agisse de la manifestation d'une certaine confiance qui m'a été accordée.

Enfin, il me semble indispensable de vanter ses qualités humaines. Je pense particulièrement à son extrême gentillesse et surtout à la grande étendue de sa patience. Mon enthousiasme pour la géométrie m'a bien souvent amené à lui poser de trop nombreuses questions et ce dans des moments parfois inadaptés.

En bref, c'était un authentique plaisir et une expérience incontestablement enrichissante de travailler sous sa direction.

Je tiens également à remercier vivement Julien DUVAL de m'avoir aimablement reçu afin que nous discutions du cas tridimensionnel du théorème 3.1. Malheureusement, ses explications limpides ne transparaisent pas exactement comme je l'aurais voulu dans mon texte. Cependant, j'insiste, notre échange m'a sans nul doute été profitable.

J'accorde ensuite toute ma reconnaissance à Michael HARRISON, ses indications pour traiter les cas pathologiques de la proposition 2.5 se sont révélées être essentielles pour l'écriture d'une preuve complète et efficace.

J'apprécie aussi grandement qu'il m'ait conseillé l'excellent [6].

J'exprime d'ailleurs toute ma sympathie à Guillaume MATHERON pour s'être procuré [6] à la bibliothèque de l'École Normale Supérieure de Paris, sans cet ouvrage ma compréhension du  $h$ -principe ne serait pas la même.

Enfin, je désire les remercier amicalement pour leur présence à ma soutenance de stage, il s'agit de : Gédéon CHEVALLIER, Marguerite FLAMMARION, Florian GRANGER, Elio JOSEPH et Alexandre LARTAUX.

Je ne pouvais pas clôturer ces remerciements sans rendre un dernier hommage à Marcel BERGER qui nous a tristement quittés en octobre 2016.

Il m'est cher de témoigner ici de l'ampleur de l'admiration que je lui voue. Chacun de ses livres a contribué à développer chez moi une véritable intuition, notamment à travers leurs nombreuses et éclairantes illustrations.

J'estime qu'à travers ses écrits, il aura nettement influencé ma conception de la géométrie et j'espère sincèrement que mon mémoire saura en être digne.

## INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

Lorsque l'on souhaite englober dans sa plus grande généralité la notion de *forme géométrique lisse*, ainsi qu'appréhender leurs *déformations régulières*, alors les *variétés différentielles* s'imposent naturellement comme objet d'étude. Il s'agit de la juste généralisation aux dimensions supérieures de l'intuition que l'on se forge des *courbes* et *surfaces* d'un espace affine tridimensionnel.

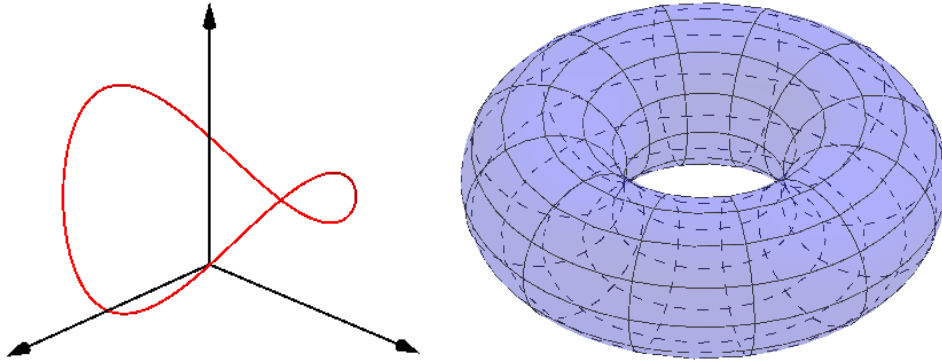


FIGURE 1. Un exemple de courbe et un exemple de surface.

Néanmoins, par opposition aux *sous-variétés différentielles*, leur description est intrinsèque, ce qui signifie qu'elles ne sont pas naturellement ambiancées. C'est l'affranchissement de tout espace environnant qui confère aux variétés différentielles une généralité vertigineuse et qui nous permet de modéliser les problèmes géométriques avec une grande flexibilité. Cependant, les variétés différentielles les plus raisonnables peuvent être réalisées dans les espaces affines comportant suffisamment de dimensions, c'est précisément ce qu'exprime le :

**Théorème 1.** (Whitney [13]) Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $m$ . Si  $M$  est dénombrable à l'infini, alors  $M$  peut être plongée dans  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

Si  $M$  est supposée compacte, la preuve du théorème 1 consiste essentiellement à construire une *partition de l'unité* adéquate à partir d'un *atlas* fini de  $M$ . En combinant astucieusement cette partition de l'unité avec les *cartes* de  $M$ , on exhibe un *plongement* de  $M$  dans  $\mathbb{R}^N$ , pour un  $N$  que l'on ne contrôle pas. Il s'agit désormais de diminuer  $N$  en postcomposant successivement le plongement obtenu avant par des projections orthogonales adaptées, on consultera [9]. Notons prématurément que l'on retrouvera des germes de cette dernière idée dans la preuve du théorème 3.1 de notre dossier.

L'idée de la preuve du théorème 1 que nous avons détaillée ci-dessus nous permet d'anticiper que les plongements d'une variété différentielle compacte dans un  $\mathbb{R}^N$  pour un  $N$  assez grand peuvent être véritablement abondants. Géométriquement, cela signifie que les réalisations de  $M$  sont hautement non-canoniques et *a priori* rien n'empêche qu'elles soient radicalement différentes. D'ailleurs, la richesse et la complexité de la théorie des nœuds qui consiste en l'étude des plongements du cercle unité dans  $\mathbb{R}^3$  en témoignera, voir [2].

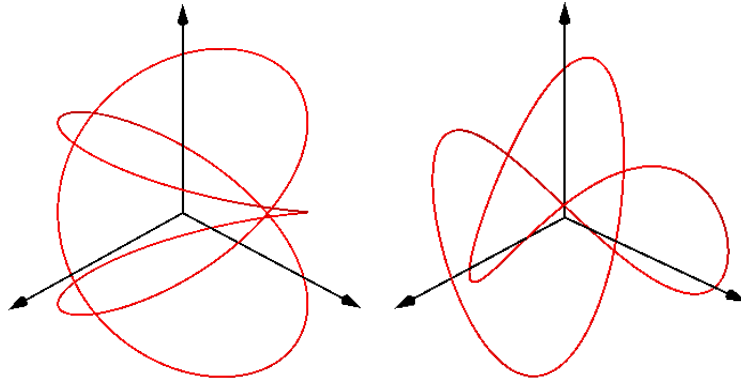


FIGURE 2. Une réalisation du nœud en huit et du nœud en trèfle.

Dans la pratique, il n'est pas vraiment commode de vérifier qu'une application donnée entre variétés différentielles réalise un plongement et ce même lorsque les variétés en question sont vraiment agréables, e.g. compactes et connexes. La principale difficulté provient du fait que l'on est systématiquement amené à tester l'injectivité de l'application donnée, ce qui n'est pas aisément manipulable. On relaxe alors la condition d'injectivité que l'on a imposé aux plongements en s'autorisant désormais les auto-intersections dans les représentations des variétés différentielles, voir la figure 3. En termes mathématiques, il s'agit de comprendre leurs *immersions* dans les espaces euclidiens  $\mathbb{R}^N$ .

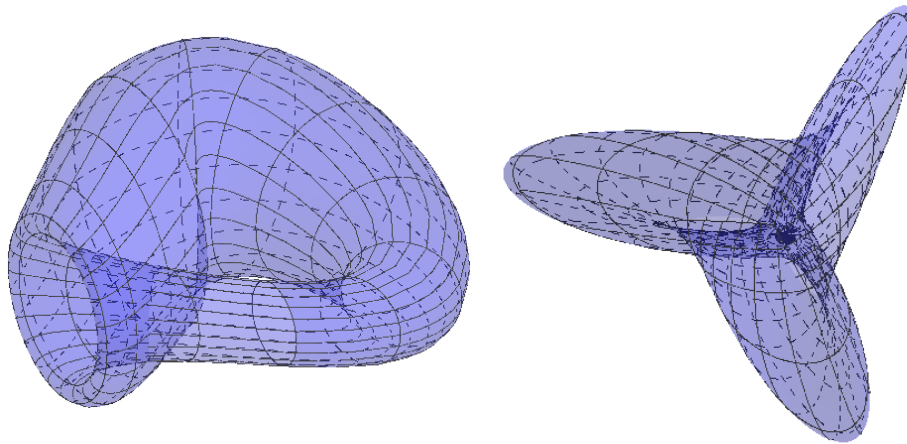


FIGURE 3. Immersions tridimensionnelles de la bouteille de Klein et du plan projectif réel (surface de Boy).

Suite à la discussion qu'a amené l'esquisse de la preuve du théorème 1, on ne sera pas vraiment surpris par le :

**Théorème 2.** Soit  $M$  une variété différentielle compacte de dimension  $m$ . Si  $n \geq 2m$ , alors les immersions de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$  sont denses dans  $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  pour la topologie compacte-ouverte.

Le lecteur intéressé par une preuve complète du théorème 2 consultera [8].



Le théorème 2 peut être perçu comme une incitation à la classification des immersions des variétés différentielles compactes dans les espaces  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Étant donné deux telles immersions, il s'agit de dégager une condition pertinente qui sera satisfaite si et seulement si les immersions en question peuvent être considérées comme identiques. On adopte le critère suivant :

**Définition 3.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles. Soient  $f: M \rightarrow N$  et  $g: M \rightarrow N$  deux immersions, alors  $f$  et  $g$  sont *régulièrement homotopes*<sup>1</sup> si et seulement s'il existe une application  $F: M \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} N$  satisfaisant :

$$F(\cdot, 0) = f, F(\cdot, 1) = g$$

et telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $F(\cdot, t)$  soit une immersion.

Géométriquement,  $f$  et  $g$  sont régulièrement homotopes si et seulement si on peut continuellement déformer dans  $N$  le *support* de  $f$ , c'est-à-dire  $f(M) \subseteq N$ , sur celui de  $g$ , c'est-à-dire  $g(M) \subseteq N$ , et ce de sorte à ce que chaque état transitoire de la transformation soit encore un objet *régulier*.

Dans le présent rapport, on s'intéressera seulement aux cas où  $M$  est une variété différentielle compacte et connexe de dimension 1 et  $N = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . On trouvera dans [9] une preuve du théorème de classification suivant :

**Théorème 4.** Soit  $M$  une variété différentielle compacte et connexe de dimension 1, alors  $M$  est difféomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$ .

Il s'agit alors de déterminer les classes d'homotopies régulières de l'ensemble des immersions de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Les méthodes employées sont à l'origine de l'intégration convexe et du principe homotopique.

Notre volonté ayant été de rédiger un dossier pouvant être lu indépendamment de tout autre manuscrit, le lecteur trouvera l'ensemble des notions nécessaires à sa compréhension dans les annexes. Nous avons pris la décision d'y adopter un point de vue généralement plus vaste que celui imposé par notre étude. On pourrait ainsi adopter nos résultats à la classification des immersions des variétés compactes connexes de dimensions supérieures.

---

1. Si  $M$  est localement compacte, il est équivalent de demander qu'il existe un chemin d'immersions de  $M$  dans  $N$  qui relie  $f$  à  $g$ .

## NOTATIONS ET CONVENTIONS

Ce dossier est consacré à la classification des courbes fermées de  $\mathbb{R}^n$  qui en chaque point admettent un vecteur vitesse non nul, elles sont dites *régulières*.

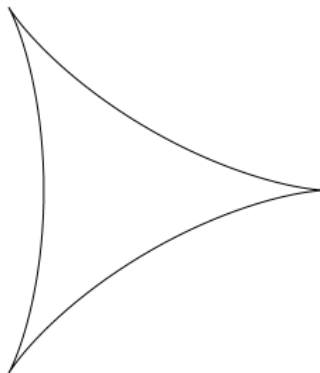


FIGURE 4. Une deltoïde n'est pas une courbe régulière.

Plus précisément, on dégage des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux telles courbes puissent être continument déformées l'une sur l'autre et cela en imposant à ce qu'au cours de la déformation le vecteur vitesse ne dégénère pas, c'est-à-dire qu'en chaque point il doit rester défini et non nul. Cette dernière contrainte signifie que la transformation ne doit pas faire apparaître d'angles et d'arêtes. Formellement, le problème consiste à décrire les composantes connexes par arcs de l'ensemble des immersions du cercle dans  $\mathbb{R}^n$ .

Dans toute la suite,  $\mathbb{R}^n$  est muni de la norme euclidienne standard notée  $\|\cdot\|$  et on identifie indifféremment le cercle unité  $\mathbb{S}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  avec l'un des quotients :

$$[0, 1]/\partial[0, 1] \text{ ou } \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Conformément aux identifications précédentes, on assimile  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  avec :

$$\{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \text{ t.q. } f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\}$$

ou encore avec l'ensemble des applications  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  qui sont 1-périodiques. De plus, comme  $\mathbb{S}^1$  est compact, on munit  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  de la topologie de la convergence uniforme des applications, c'est-à-dire de la norme définie par :

$$f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \|f(x)\|.$$

Similairement,  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  est muni de la topologie de la convergence uniforme des applications et de leurs dérivées, c'est-à-dire de la norme définie par :

$$f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \|f(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{S}^1} \|f'(x)\|.$$

Finalement, on note  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des immersions du cercle dans  $\mathbb{R}^n$ , il s'agit de l'ensemble des  $f \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  dont la dérivée ne s'annule pas. Il est naturellement muni de la topologie induite par celle de  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .

1. LES IMMERSIONS UNIDIMENSIONNELLES DU CERCLE

Le théorème de Rolle assure que la dérivée d'une application  $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$  s'annule nécessairement, ce qui empêche l'existence d'immersions de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}$ , d'où :

**Proposition 1.1.** Il n'existe pas d'immersion de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans le même ordre de résultat, on rappelle que l'on a la :

**Proposition 1.2.** Il n'existe pas d'homéomorphisme de  $\mathbb{S}^1$  sur un intervalle.

*Preuve.* Supposons par l'absurde qu'il existe  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow I$  un homéomorphisme, il existe  $N \in \mathbb{S}^1$  tel que l'on ait :

$$(1) \quad \varphi(N) \notin \partial I.$$

En effet,  $\varphi$  étant un homéomorphisme son image est  $I$  qui est différent de  $\partial I$ . Dès lors, comme  $\mathbb{S}^1$  est connexe, l'application  $g$  serait constante, contradiction. Par ailleurs,  $\varphi$  induit un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  sur  $I \setminus \{\varphi(N)\}$ .

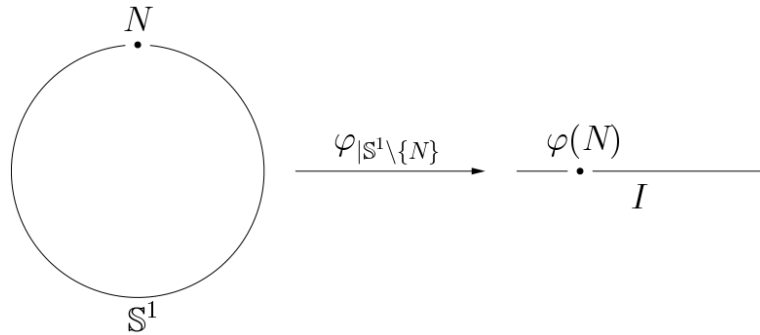


FIGURE 5. L'homéomorphisme induit par  $\varphi$  en restriction à  $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ .

Or, la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^1$  de pôle  $N$  sur sa droite équatoriale réalise un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  sur  $\mathbb{R}$ , ainsi  $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  est connexe.

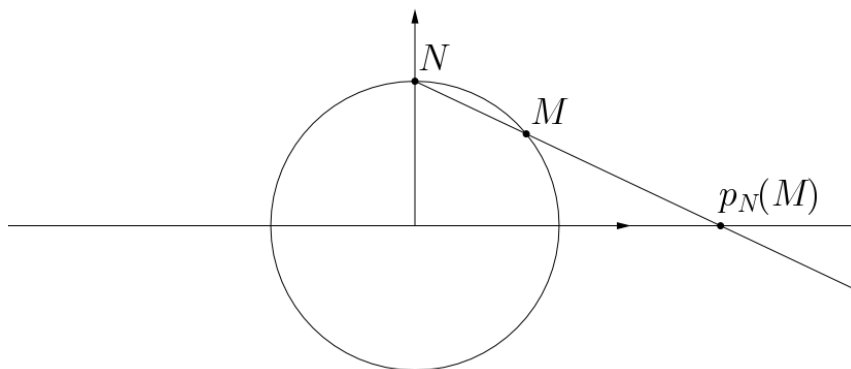


FIGURE 6. Construction de la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^1$  de pôle  $N$  sur sa droite équatoriale.

Finalement, on en déduit que  $I \setminus \{\varphi(N)\}$  est connexe, ce qui contredit (1). D'où le résultat annoncé. ■

## 2. LES IMMERSIONS BIDIMENSIONNELLES DU CERCLE

Le cercle  $\mathbb{S}^1$  étant naturellement plongé dans  $\mathbb{R}^2$ , les immersions bidimensionnelles du cercle occupent une place centrale parmi les immersions du cercle, comme on le constatera en comparant les résultats des théorèmes 2.20 et 3.1.

2.1. Une première manifestation d'un  $h$ -principe 1-paramétrique.

On note  $X$  l'ensemble  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et on introduit l'application suivante :

$$J: \begin{cases} I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \rightarrow & C^0(\mathbb{S}^1, X) \\ f & \mapsto & f' \end{cases} .$$

On va s'attacher à montrer que l'application  $J$  induit une bijection sur les composantes connexes par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  et  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ .

**Proposition 2.1.** Soit  $f \in C^0(\mathbb{S}^1, X)$ , alors il existe  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  et une homotopie  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} X$  telles que  $H(\cdot, 0) = f$  et  $H(\cdot, 1) = J(g)$ .

*Preuve.* Par homotopie radiale sur  $f$ , on va se ramener au cas où  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Plus précisément, on admet et on montrera dans la proposition 2.11 que les applications  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  et  $f/\|f\|: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  sont homotopes dans  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ . Par conséquent, on suppose désormais sans perte de généralité que  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et on distingue alors les deux cas suivants :

1. Supposons que  $f$  soit non constante, on montre alors que la valeur moyenne de  $f$  est à l'intérieur du disque unité  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  ; pour ce faire, on introduit :

$$V := \int_0^1 f(u) du.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors :

$$(1) \quad |V| \leq \left( \int_0^1 \|1\|^2 du \right)^{1/2} \left( \int_0^1 \|f(u)\|^2 du \right)^{1/2} = 1.$$

Il y a égalité si et seulement si la famille  $(1, f)$  est liée dans l'espace  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ , autrement dit si et seulement si  $f$  est constante. Ainsi, par hypothèse, l'inégalité (1) est stricte, ce qui signifie que  $V \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}$ . On introduit désormais l'application  $g: [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$  définie par :

$$g(x) := \int_0^x f(u) du - xV.$$

On constate que  $g(0) = g(1)$  et  $g$  induit alors une application de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^2$ . En outre, quel que soit  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$(2) \quad g'(x) = f(x) - V.$$

Ainsi, comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$  et que  $V \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}$ , la dérivée de  $g$  ne s'annule pas, d'où  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ . On introduit enfin l'homotopie suivante :

$$H: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & X \\ (x, t) & \mapsto & f(x) - tV \end{cases} .$$

Soit  $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , comme  $f(x) \in \mathbb{S}^1$  et  $tV \in \mathring{\mathbb{D}}$ , car  $V \in \mathring{\mathbb{D}}$ , on a :

$$H(x, t) \neq 0.$$

En d'autres termes,  $H$  est correction définie, elle est de plus continue et elle vérifie également  $H(\cdot, 0) = f$ , ainsi que  $H(\cdot, 1) = J(g)$ , d'après l'égalité (2). Ce qui permet de clore ce cas de figure.

2. Supposons que  $f$  soit constante, alors on se ramène au cas 1 en montrant que  $f$  est homotope dans  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$  à une application non constante. Pour ce faire, on introduit l'application  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par :

$$H(x, t) := \begin{cases} \text{rot}(2\pi tx) \cdot f(0) & x \in [0, 1/2] \\ \text{rot}(2\pi t(1-x)) \cdot f(0) & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

où pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rot}(\theta)$  désigne la rotation de centre  $(0, 0)$  et d'angle  $\theta$ .

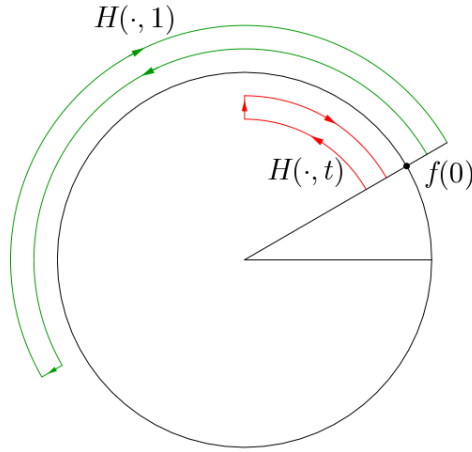


FIGURE 7. Représentation de l'homotopie  $H$ .

On rappelle que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\text{rot}(\theta) \cdot (x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \cos(\theta)x + \sin(\theta)y).$$

En particulier,  $H$  est continue et quel que soit  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$H(0, t) = H(1, t),$$

ce qui signifie que  $H(\cdot, t)$  définit effectivement une application de  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ . En outre, puisque  $f$  est constante égale à  $f(0)$ , il vient :

$$H(\cdot, 0) = f.$$

Enfin, on constate que  $H(\cdot, 1)$  est une application non constante de  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ . Finalement, d'après le cas 1, il existe  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  telle que  $H(\cdot, 1)$  et  $J(g)$  soient homotopes dans  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$  et l'on en déduit que  $f$  et  $J(g)$  sont homotopes dans  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ , ce qui permet de clore ce cas de figure.

D'où le résultat annoncé. ■

**Corollaire 2.2.** L'application induite par  $J$  sur les composantes connexes par arcs,  $J_*: \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X))$  réalise une surjection.

Afin de montrer que  $J_*$  est également une injection, on aura besoin du :

**Lemme 2.3.** Soient  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  et  $\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  un  $C^1$ -difféomorphisme croissant, alors  $g$  et  $g \circ \lambda$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

*Preuve.* On définit l'application  $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$  par :

$$F(x, t) = g((1-t)x + t\lambda(x)).$$

Comme  $\lambda(0) = 0$  et  $\lambda(1) = 1$ ,  $F$  est un chemin de  $g$  à  $g \circ \lambda$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ . Remarquons que pour  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$F(0, t) = g(0) = g(1) = F(1, t).$$

Par ailleurs, quel que soit  $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , on a :

$$\frac{dF}{dx}(x, t) = ((1-t) + t\lambda'(x))g'((1-t)x + t\lambda(x)) \neq 0,$$

puisque  $(1-t) + t\lambda'(x)$  est un point du segment d'extrémités 1 et  $\lambda'(x) > 0$  et que l'application  $g'$  ne s'annule pas. D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque 2.4.** Insistons sur le fait que le résultat du lemme 2.3 peut être mis en défaut si l'on considère des  $C^1$ -difféomorphismes décroissants de  $[0, 1]$ . Pour un contre-exemple, il suffit de considérer  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  définie par :

$$g(x) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)),$$

ainsi que  $\lambda$  le  $C^1$ -difféomorphisme décroissant de  $[0, 1]$  défini par :

$$\lambda(x) := 1 - x.$$

On se réfère à l'exemple 2.23, où l'on prouve que  $g$  et  $g \circ \lambda$  ne sont pas dans la même composante connexe par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

**Proposition 2.5.** Soient  $g_1$  et  $g_2$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  telles qu'il existe une homotopie  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} X$  satisfaisant  $H(\cdot, 0) = J(g_1)$  et  $H(\cdot, 1) = J(g_2)$ , alors il existe une homotopie  $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $F(\cdot, t) \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ ,  $F(\cdot, 0) = g_1$  et  $F(\cdot, 1) = g_2$ .

*Preuve.* On distingue les deux cas suivants :

1. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , supposons que  $g_i$  soit de longueur 1, alors par l'intermédiaire du lemme 2.3, on va se ramener au cas où  $g_i'$  et  $H$  sont à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$ . Remarquons en effet que les paramétrages normaux standards de  $g_i$  sont des  $C^1$ -difféomorphismes croissants de  $[0, 1]$ , ainsi quitte à précomposer  $g_i$  par l'un de ces paramétrages, on suppose que  $g_i': \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Enfin, l'application  $H$  étant à valeurs dans  $X$ , on peut définir  $\overline{H}: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  par :

$$\overline{H}(x, t) := \frac{H(x, t)}{\|H(x, t)\|}.$$

Or, comme  $H(\cdot, 0) = g_1'$  et  $H(\cdot, 1) = g_2'$  sont à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$ , il vient :

$$\overline{H}(\cdot, 0) = g_1' \text{ et } \overline{H}(\cdot, 1) = g_2'.$$

Dès lors, quitte à remplacer  $H$  par  $\overline{H}$ , on suppose que  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ . On distingue alors les deux sous-cas suivants :

- a. Supposons que  $\deg(g_1') \neq 0$ , alors pour  $t \in [0, 1]$ , on définit  $h_t: \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  comme étant l'application  $H(\cdot, t)$ . On constate que  $h_t$  est homotope à  $g_1'$ . En effet, il suffit de considérer l'homotopie suivante :

$$H_t: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (x, s) & \mapsto & H(x, st) \end{cases}.$$

On en déduit que  $h_t$  est de même degré que  $g_1'$  et donc de degré non nul.

En particulier,  $h_t: \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  est non constante et comme on l'a déjà vu dans le cas 1 de la preuve de la proposition 2.1, on a :

$$V_t := \int_0^1 h_t(u) du \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

On introduit alors l'application  $F: [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$  définie par :

$$F(x, t) := \int_0^x h_t(u) du - xV_t.$$

On constate que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $F(0, t) = F(1, t)$  et ainsi  $F(\cdot, t)$  induit une application de  $\mathbb{S}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire que  $F \in C^0(\mathbb{S}^1 \times [0, 1], \mathbb{R}^2)$ . En outre, quel que soit  $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , on a :

$$\frac{dF}{dx}(x, t) = h_t(x) - V_t.$$

Or, comme  $h_t$  est à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$  et que  $V_t \in \mathring{\mathbb{D}}$ , la dérivée de  $F(\cdot, t)$  ne s'annule pas, c'est-à-dire que  $F(\cdot, t)$  est une immersion de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $i \in \{0, 1\}$ , comme  $h_i = \overline{H}(\cdot, i) = g_i'$  et que  $g_i(0) = g_i(1)$ , on a  $V_i = 0$ . En particulier, on en déduit que l'on a :

$$F(\cdot, i) = g_i - g_i(0).$$

Autrement dit,  $g_1 - g_1(0)$  et  $g_2 - g_2(0)$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ . Pour conclure, il suffit de voir que pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $g_i$  et  $g_i - g_i(0)$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , ce qui peut être accompli par :

$$F_i: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, t) & \mapsto & g_i(x) - tg_i(0) \end{cases}.$$

En effet, comme  $g_i(0) = g_i(1)$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$F_i(0, t) = F_i(1, t).$$

En outre, quel que soit  $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , on a :

$$\frac{dF_i}{dx}(x, t) = g_i'(x) \neq 0.$$

Ce qui permet de conclure dans cette situation.

- b. Supposons que  $\deg(g'_1) = 0$ , alors on va se ramener au cas 1a en exhibant une homotopie de  $g'_1$  à  $g'_2$  qui soit non constante en restriction à  $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$ , pour chaque  $t \in [0, 1]$ . En premier lieu, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on considère  $\theta_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement continu de  $g'_i$  pour le revêtement universel :

$$p: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ x & \mapsto & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{cases} .$$

Dès lors, comme  $g'_1$  et  $g'_2$  sont toutes les deux de degré zéro, l'application continue  $\theta_i$  est 1-périodique et elle atteint un minimum global en  $x_i \in \mathbb{R}$ . On introduit l'application  $\overline{\theta}_2: \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$  définie par :

$$\overline{\theta}_2(x) := \theta_2(x + x_2 - x_1).$$

L'application  $\overline{\theta}_2$  est 1-périodique et atteint un minimum global en  $x_1$ . Désormais, pour  $t \in [0, 1]$ , on introduit  $\alpha_t: \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$  définie par :

$$\alpha_t(x) := (1 - t)\theta_1(x) + t\overline{\theta}_2(x).$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un  $t \in [0, 1]$  tel que  $\alpha_t$  soit constante, alors quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a l'égalité suivante :

$$(1 - t) \underbrace{(\theta_1(x) - \theta_1(x_1))}_{\geq 0} + t \underbrace{(\overline{\theta}_2(x) - \overline{\theta}_2(x_1))}_{\geq 0} = 0.$$

Dès lors, comme  $(1 - t) \geq 0$ ,  $t \geq 0$  et que l'une de ces inégalités est stricte, au moins une des applications  $\theta_1$  ou  $\overline{\theta}_2$  est constante. Ceci garantit l'existence d'un  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $\theta_i$  soit constante, ce qui est impossible. En effet, cela signifierait que  $g'_i$  est constante non nulle et l'on aurait alors  $g_1(0) \neq g_1(1)$ , ce qui n'est pas. Finalement, l'application suivante :

$$A: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (x, t) & \mapsto & p(\alpha_t(x)) \end{cases}$$

est une homotopie bien définie de  $g'_1$  à  $p \circ \overline{\theta}_2$ . En effet, comme quel que soit  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha_t$  est 1-périodique, il est garanti que l'on ait :

$$\forall t \in [0, 1], A(0, t) = A(1, t).$$

Par ailleurs, on affirme que pour  $t \in [0, 1]$ ,  $A(\cdot, t)$  n'est pas constante. Dans le cas contraire, il existerait  $t \in [0, 1]$  tel que l'application continue  $\alpha_t - \alpha_t(0)$  soit à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et elle serait constante, ce qui n'est pas.

Remarquons ensuite que l'application  $B: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  définie par :

$$B(x, t) := p(\theta_2(x + t(x_2 - x_1)))$$

est une homotopie bien définie de  $g'_2$  à  $p \circ \overline{\theta}_2$ , ce qui est une conséquence de la 1-périodicité de l'application  $x \mapsto \theta_2(x + t(x_2 - x_1))$  pour  $t \in [0, 1]$ . En outre, on constate que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $B(\cdot, t)$  n'est pas constante. Si ce n'était pas le cas, il existerait un  $t \in [0, 1]$  tel que par le même argument de connexité l'application  $x \mapsto \theta_2(x + t(x_2 - x_1))$  soit constante.



Ainsi,  $\theta_2$  serait alors constante, ce que l'on a déjà prouvé être impossible. Enfin, on introduit l'application  $C: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  définie par :

$$C(x, t) := \begin{cases} A(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ B(x, 2(1-t)) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Il s'agit d'une homotopie de  $g_1'$  à  $g_2'$  qui est non constante en restriction à chaque  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , pour  $t \in [0, 1]$ . Finalement, si on lui applique la construction décrite dans le cas 1a, on obtient une homotopie de  $g_1$  à  $g_2$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , ce qui permet de conclure dans cette situation.

Ce qui permet de clore ce cas de figure.

2. On ne suppose plus que  $g_1$  et  $g_2$  sont de longueur 1, alors pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $\ell_i$  la longueur de  $g_i$ . On va montrer que  $g_i$  est homotope dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  à une immersion de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui est de longueur 1, à savoir  $\frac{g_i}{\ell_i}$ .

Pour ce faire, on introduit l'application  $F_i: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$  définie par :

$$F_i(x, t) := \frac{g_i(x)}{\ell_i^t}.$$

Il s'agit d'une famille d'homothéties telle que  $F_i(\cdot, 0) = g_i$  et  $F_i(\cdot, 1) = g_i/\ell_i$ . En outre, quel que soit  $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , on a :

$$\frac{dF_i}{dx}(x, t) = \frac{g_i'(x)}{\ell_i^t} \neq 0.$$

Or, d'après le cas 1,  $g_1/\ell_1$  et  $g_2/\ell_2$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , ce qui permet de clore ce cas de figure.

D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque 2.6.** Dans la situation idéale que constitue le cas 1a, la preuve de la proposition 2.5 est une version à paramètres de celle de la proposition 2.1.

**Corollaire 2.7.** L'application induite par  $J$  sur les composantes connexes par arcs,  $J_*: \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \hookrightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X))$  réalise une injection.

En rapprochant les résultats des corollaires 2.2 et 2.7, on a établi le :

**Théorème 2.8.** L'application induite par  $J$  sur les composantes connexes par arcs,  $J_*: \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X))$  réalise une bijection.

**Remarque 2.9.** Le théorème 2.8 exprime que le problème de classification des immersions de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  satisfait à un  $h$ -principe 1-paramétrique.

## 2.2. Les composantes connexes par arcs de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ .

À l'occasion de la détermination des composantes connexes par arcs de  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ , on revient sur une affirmation laissée sans argument lors de la preuve de la proposition 2.1 ; pour ce faire on introduit l'application suivante :

$$r: \begin{cases} C^0(\mathbb{S}^1, X) & \rightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \\ f & \mapsto \frac{f}{\|f\|} \end{cases} .$$

**Proposition 2.10.** L'application induite par  $r$  sur les composantes connexes par arcs,  $r_*: \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X)) \rightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1))$  réalise une surjection.

*Preuve.* Il suffit de remarquer que pour  $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ , on a  $r(f) = f$ . ■

**Proposition 2.11.** Soit  $f \in C^0(\mathbb{S}^1, X)$ , alors il existe  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} X$  telle que  $H(\cdot, 0) = f$  et  $H(\cdot, 1) = r(f)$ .

*Preuve.* On introduit  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  l'application définie par :

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tr(f)(x).$$

Soit  $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , on a :

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)\|f(x)\| + t}{\|f(x)\|} f(x).$$

Ainsi, comme  $f(x) \neq 0$  et que  $t$  et  $1 - t$  ne sont pas tous les deux nuls, on a :

$$H(x, t) \neq 0.$$

En d'autres termes,  $H$  est bien définie, elle est de plus continue et elle vérifie  $H(\cdot, 0) = f$ , ainsi que  $H(\cdot, 1) = r(f)$ . D'où le résultat annoncé. ■

**Corollaire 2.12.** Soient  $f_1$  et  $f_2$  dans  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$  telles qu'il existe une homotopie  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  satisfaisant  $H(\cdot, 0) = r(f_1)$  et  $H(\cdot, 1) = r(f_2)$ , alors il existe une homotopie  $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  telle que  $F(\cdot, 0) = f_1$  et  $F(\cdot, 1) = f_2$ .

*Preuve.* D'après la proposition 2.11, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $f_i$  et  $r(f_i)$  sont homotopes dans  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ . Or, par hypothèse les applications  $r(f_1)$  et  $r(f_2)$  sont homotopes dans  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ . D'où le résultat annoncé. ■

**Corollaire 2.13.** L'application induite par  $r$  sur les composantes connexes par arcs,  $r_*: \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X)) \hookrightarrow \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1))$  réalise une injection.

Les résultats du corollaire 2.13 et de la proposition 2.10 fournissent la :

**Proposition 2.14.** L'application induite par  $r$  sur les composantes connexes par arcs,  $r_*: \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, X)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1))$  réalise une bijection.

Enfin, on se reportera à l'annexe D pour une preuve du très classique :

**Théorème 2.15.** Le degré induit une bijection bien définie de l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$  sur  $\mathbb{Z}$ .

**2.3. Le théorème de Whitney-Grauenstein.**

On oriente  $\mathbb{R}^2$  en décrétant que sa base canonique est directe, ainsi  $\mathbb{S}^1$  est naturellement muni de l'orientation induite, celle du sens trigonométrique.

On résume les résultats du théorème 2.8, de la proposition 2.14 et du théorème 2.15 dans le diagramme suivant où toutes les flèches sont bijectives :

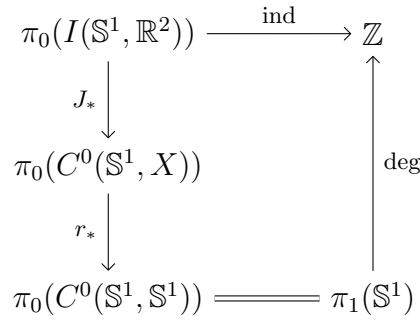


FIGURE 8. Diagramme synthétisant la détermination des composantes connexes par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .

Une lecture directe du diagramme 8 conduit à la :

**Proposition 2.16.** L'ensemble des composantes connexes de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$  est en correspondance bijective avec  $\mathbb{Z}$ .

On peut entièrement expliciter la correspondance de la proposition 2.16, mais cela nécessite d'introduire la :

**Définition 2.17.** Soit  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , on appelle *indice* de  $g$  et on note  $\text{ind}(g)$  le degré de son *hodographe*, c'est-à-dire le degré de l'application  $\frac{g'}{\|g'\|} : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$ .

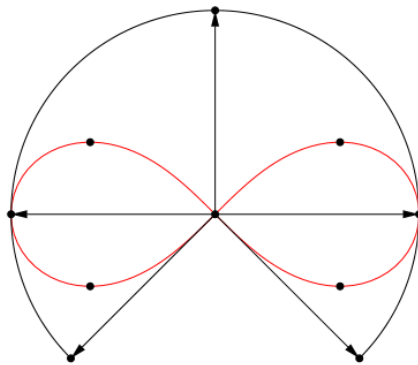


FIGURE 9. Représentation de l'hodographe d'une immersion associée à la figure en huit.

**Remarque 2.18.** Avec nos notations, quel que soit  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , on a :

$$\text{ind}(g) = (\text{deg} \circ r \circ J)(g).$$

**Remarque 2.19.** Soit  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , en chaque  $x \in \mathbb{S}^1$ , il existe  $U_x$  un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{S}^1$  tel que  $g: U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$  soit un plongement, on consultera [9]. En particulier,  $g(U_x)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  de dimension 1 et elle est naturellement orientée par  $\mathbb{S}^1$  : on transporte l'orientation de  $\mathbb{S}^1$  à  $g(U_x)$  par l'intermédiaire de la différentielle de  $g$ . Cette dernière étant continue, l'orientation sur chacun des  $g(U_x)$  est compatible : elle dépend continument de  $x$ . Notons que puisque  $\mathbb{S}^1$  est compact, on peut choisir les  $U_x$  en nombre fini. Géométriquement, le support de  $g$  est obtenu en recollant un nombre fini de courbes orientées, ce qui y définit alors un sens de parcours privilégié.

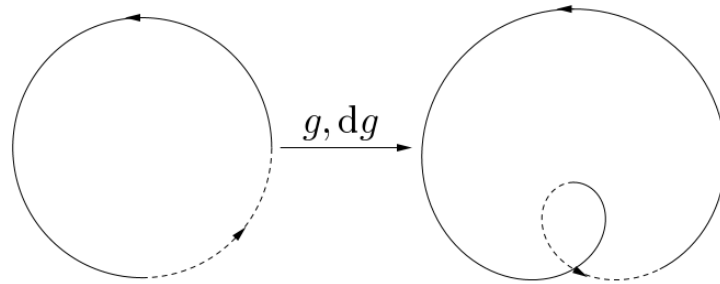


FIGURE 10. Définition d'un sens de parcours naturel sur un limaçon trisecteur.

On en déduit que le support de  $g$  admet en tout point un unique *vecteur tangent direct et unitaire*, c'est-à-dire que pour tout  $g(x)$ ,  $x \in \mathbb{S}^1$ , il existe un unique vecteur unitaire formant une base directe de l'espace tangent de  $g(U_x)$  en  $g(x)$ , il est donné par  $g'(x)/\|g'(x)\|$ . Il s'agit sommairement de l'unique vecteur tangent au support de  $g$  pointant dans son sens de parcours privilégié. Finalement, l'indice de  $g$  s'interprète géométriquement comme le nombre de tours complets réalisés par ce vecteur lorsqu'un point parcourt une et une unique fois le support de  $g$ . Autrement dit, l'indice de  $g$  quantifie l'enroulement des vecteurs tangents directs et unitaires à la courbe fermée du plan décrite par  $g$ .

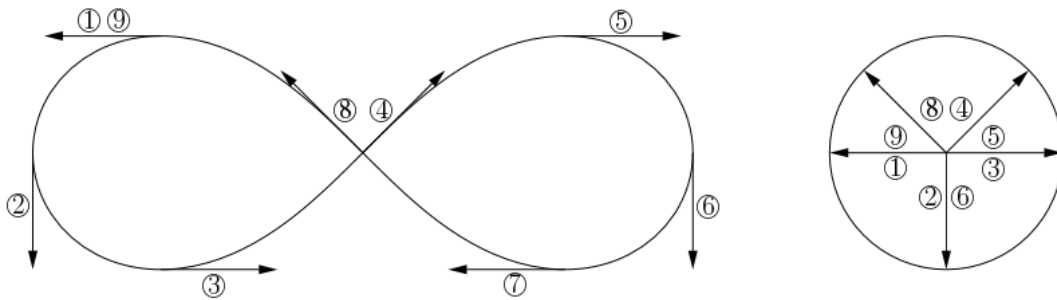


FIGURE 11. Illustration du calcul de l'indice d'une immersion associée à la figure en huit, il s'agit de 0.

En tenant compte de la nature des flèches du diagramme 8, on obtient le :

**Théorème 2.20.** (Whitney [14], Graustein) L'indice induit une bijection bien définie de l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  sur  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque 2.21.** On dira de deux courbes régulières fermées du plan qu'elles peuvent être *régulièrement déformées* l'une en l'autre si et seulement si il existe une transformation continue de la première à la seconde dont chaque état transitoire est encore une courbe régulière fermée du plan. Du point de vue géométrique, le théorème 2.20 exprime alors que c'est le cas si et seulement si le nombre de tours complets réalisé par les vecteurs tangents directs et unitaires respectifs à ces courbes est le même.

**Remarque 2.22.** On précise l'affirmation de la remarque 2.4, soient  $g$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  et  $\lambda$  est un  $C^1$ -difféomorphisme décroissant de  $[0, 1]$ , alors on a :

$$\text{ind}(g \circ \lambda) = -\text{ind}(g).$$

Dès lors, d'après le théorème 2.20,  $g$  et  $g \circ \lambda$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  si et seulement si  $\text{ind}(g) = 0$ .

**Exemple 2.23.** En particulier, le théorème 2.20 statue l'impossibilité de retourner le cercle dans le plan, c'est-à-dire de le déformer régulièrement au sens décrit dans la remarque 2.21, de sorte à ce que son orientation soit renversée.

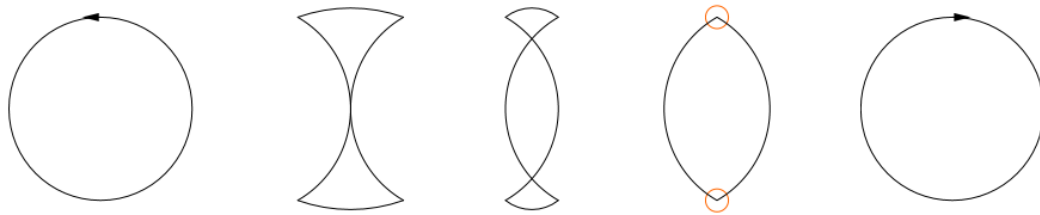


FIGURE 12. Une tentative infructueuse de retournement.

**Remarque 2.24.** Deux courbes (régulières) fermées du plan peuvent toujours être continument déformées l'une sur l'autre. En effet, si  $g_1$  et  $g_2$  sont dans  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , l'application suivante est une homotopie de  $g_1$  à  $g_2$  dans  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  :

$$H: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, t) & \mapsto & (1-t)g_1(x) + tg_2(x) \end{cases} .$$

Géométriquement, cette transformation consiste à déplacer chaque point du support de  $g_1$ , disons  $g_1(x)$ ,  $x \in \mathbb{S}^1$ , le long du segment qui le joint au point qui lui correspond sur le support de  $g_2$ , à savoir  $g_2(x)$ . Il s'agit essentiellement de tirer graduellement et radialement le support de  $g_1$  sur celui de  $g_2$ .

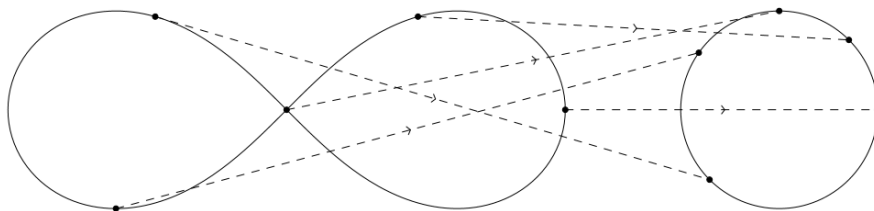


FIGURE 13. Illustration du procédé de poussé radial dans le cas de la figure en huit et du cercle.

Cette stratégie est mise à défaut lorsque l'on tente de régulièrement déformer la figure en huit sur le cercle, voir la figure 14.

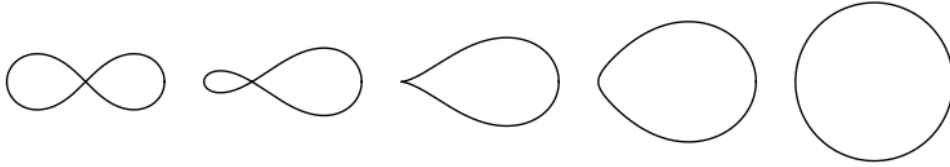


FIGURE 14. Poussé radial de la figure en huit sur le cercle ; apparition d'une singularité à la troisième étape.

**Remarque 2.25.** Il est essentiel de demander à ce que les états transitoires des transformations considérées dans le théorème 2.20 soient des courbes planes. Si l'on autorise désormais les déformations à se produire dans un espace possédant au moins trois dimensions, toute courbe régulière plane peut continument et régulièrement être déformée en une autre. Si l'on exploite l'une de ces dimensions nouvellement introduites, on peut désentrelacer ces courbes, c'est-à-dire que l'on élimine leurs auto-intersections et on les déforme en des cercles.

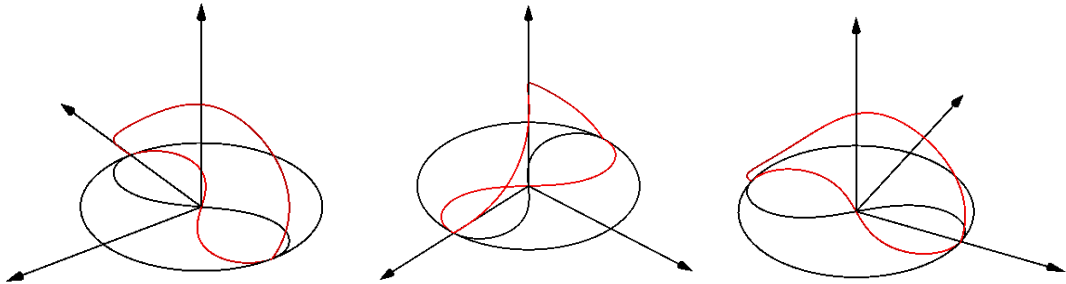


FIGURE 15. Désentrelacement de la figure en huit.

Ainsi, on est ramené à réaliser le retournement du cercle dans l'espace.

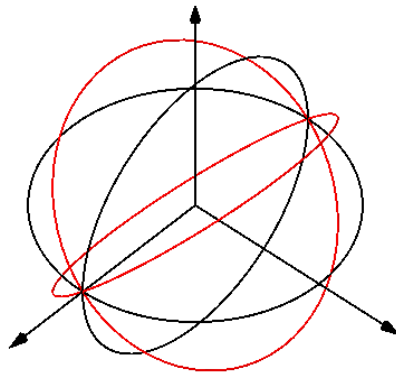


FIGURE 16. Réalisation du retournement du cercle dans l'espace.

Pour ce faire, on suppose qu'il se situe dans le plan  $(xOy)$  et on introduit :

$$H: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, t) & \mapsto & (\cos(2\pi x), \cos(\pi t) \sin(2\pi x), \sin(\pi t) \sin(2\pi x)) \end{cases} \cdot$$

On constate que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(\cdot, t)$  est une immersion de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Géométriquement,  $H$  réalise graduellement une rotation d'angle  $\pi$  et d'axe  $x$  du cercle de centre  $(0, 0, 0)$ , de rayon 1 et d'axe  $z$ , voir la figure 16.

### 3. LES IMMERSIONS DU CERCLE DANS LES DIMENSIONS SUPÉRIEURES

En reprenant à l'identique les preuves du théorème 2.8 et de la proposition 2.14, on montre moralement que l'on a la correspondance bijective suivante :

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)) \cong \pi_1^*(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Néanmoins, si l'on souhaitait établir rigoureusement la proposition 2.5, il nous faudrait développer une théorie plus générale du degré, ce que l'on s'épargnera. Si l'on néglige cette subtilité, comme  $\mathbb{S}^{n-1}$  est simplement connexe pour  $n \geq 3$ , on verra [5], d'après la proposition D.12,  $\pi_1^*(\mathbb{S}^{n-1})$  est trivial et on a le :

**Théorème 3.1.** Soit  $n \geq 3$ , alors l'espace  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  est connexe par arcs.

Cependant, par soucis de complétude, on s'attache désormais à donner une preuve du théorème 3.1 qui soit indépendante du théorème 2.8, cela au moins quand  $n \geq 4$ . Pour commencer, on aura besoin de la :

**Proposition 3.2.** Soient  $n \geq 3$  et  $f$  une application de classe  $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^{n-1})$ , alors l'ensemble  $f(\mathbb{S}^1)$  est négligeable dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Preuve.* On commence par constater que puisque  $n \geq 3$ , on a :

$$\dim(\mathbb{S}^1) = 1 < n - 1 = \dim(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Dès lors, quel que soit  $x \in \mathbb{S}^1$ , l'application linéaire  $d_x f: T_x \mathbb{S}^1 \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{S}^{n-1}$  n'est pas surjective. Ainsi, l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est  $f(\mathbb{S}^1)$ . D'où le résultat annoncé, d'après le théorème de Sard. ■

**Remarque 3.3.** Si l'application  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  est seulement continue, alors  $f$  peut être surjective, ce qui met très largement à défaut la proposition 3.2. On peut en effet construire  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]^n$  continue et surjective, voir [11]. Finalement, si  $\varphi: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  est une paramétrisation de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ , alors l'application  $f := \varphi \circ g$  est continue et surjective de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Remarque 3.4.** Notons que la proposition 3.2 est une simple application du théorème de Sard. D'ailleurs, il s'agit de ce même résultat que l'on utiliserait pour définir le degré d'une application de classe  $C^\infty$  entre une variété compacte orientée et une variété connexe orientée, voir [10].

**Remarque 3.5.** La proposition 3.2 permet d'établir rapidement tout lacet de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$  est homotope à un lacet constant, à condition que  $n \geq 3$ . En effet, d'après la proposition 3.2, un tel lacet évite toujours un point  $q$ , mais par convexité, l'image de ce lacet par une projection stéréographique de pôle  $q$  est alors homotope à un lacet constant de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Si  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\pi_v$  désigne la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  parallèlement à  $\mathbb{R}v$ . On va alors se ramener à la situation décrite en remarque 2.25 par le :

**Lemme 3.6.** Soient  $n \geq 3$  et  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  de classe  $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , alors pour presque tout  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\pi_v \circ g$  est une immersion.



*Preuve.* L'application  $g'$  ne s'annulant pas, on peut définir  $\varphi: \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{S}^{n-1}$  par :

$$\varphi(x) := \frac{g'(x)}{\|g'(x)\|}.$$

Soit  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\pi_v$  étant linéaire, alors  $\pi_v \circ g$  est  $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  et on a l'égalité :

$$(\pi_v \circ g)' = \pi_v \circ g'.$$

En particulier, comme  $\ker(\pi_v) = \mathbb{R}v$ , quel que soit  $x \in \mathbb{S}^1$ , il vient :

$$(\pi_v \circ g)'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) \in \mathbb{R}v.$$

Dès lors, comme  $v$  est unitaire, l'application  $\pi_v \circ g$  n'est pas une immersion si et seulement s'il existe  $x \in \mathbb{S}^1$  tel que  $g'(x) \in \mathbb{R}v$ , à savoir si et seulement si :

$$v = \pm \frac{g'(x)}{\|g'(x)\|}.$$

Finalement,  $\pi_v \circ g$  n'est pas une immersion si et seulement si on a  $\pm v \in \varphi(\mathbb{S}^1)$ , mais d'après la proposition 3.2,  $-\varphi(\mathbb{S}^1) \cup \varphi(\mathbb{S}^1)$  est négligeable dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ . D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque 3.7.** Le lemme 3.6 est très grossièrement faux en dimension 2. En effet, si  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  est de classe  $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , alors d'après la proposition 1.1, quel que soit  $v \in \mathbb{S}^1$ ,  $\pi_v \circ g$  n'est pas une immersion, car  $\dim(v^\perp) = 1$ .

Suite au lemme 3.6, on montre que l'on ne change pas la composante connexe par arcs d'une immersion de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$  en la projetant orthogonalement sur un hyperplan, cela dès que l'application projetée est encore une immersion.

**Lemme 3.8.** Soient  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  et  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Si  $\pi_v \circ g$  est une immersion, alors  $g$  et  $\pi_v \circ g$  sont dans la même composante connexe de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .

*Preuve.* On définit l'application  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  par :

$$H(x, t) = (1 - t)g(x) + t\pi_v(g(x)).$$

On constate que  $H$  est continue et elle vérifie  $H(\cdot, 0) = g$  et  $H(\cdot, 1) = \pi_v \circ g$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $H(\cdot, t)$  ne soit pas une immersion, alors il existe  $x \in \mathbb{S}^1$  satisfaisant :

$$\frac{dH}{dx}(x, t) = (1 - t)g'(x) + t\pi_v(g'(x)) = 0.$$

Or, comme  $g$  et  $\pi_v \circ g$  sont des immersions, on ne peut pas avoir  $t \in \{0, 1\}$ . En particulier, on en déduit que l'on a :

$$\pi_v(g'(x)) = \frac{t-1}{t}g'(x).$$

Dès lors, comme  $g'(x)$  est un vecteur non nul,  $(t-1)/t$  est une valeur propre de la projection  $\pi_v$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{t-1}{t} \in \{0, 1\},$$

ce qui n'est pas. D'où le résultat annoncé. ■

On ramène la preuve du théorème 3.1 à l'heuristique que l'on a décrite dans la remarque 2.25 par l'intermédiaire du :

**Corollaire 3.9.** Soient  $n \geq 3$  et  $g_1, g_2$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , alors il existe  $\Pi$  un sous-espace vectoriel de dimension 2 de  $\mathbb{R}^n$ , ainsi que  $\overline{g}_1$  et  $\overline{g}_2$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  tels que pour tout  $i \in \{1, 2\}$  :

- Les immersions  $g_i$  et  $\overline{g}_i$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .
- Le support de  $\overline{g}_i$  est inclus dans  $\Pi$ , c'est-à-dire que l'on a  $\overline{g}_i(\mathbb{S}^1) \subseteq \Pi$ .

*Preuve.* Soit  $m$  le plus petit entier naturel non nul tel qu'il existe  $\Pi$  un sous-espace vectoriel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ , ainsi que des applications  $\overline{g}_1$  et  $\overline{g}_2$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  tels que pour tout  $i \in \{1, 2\}$  :

- Les immersions  $g_i$  et  $\overline{g}_i$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .
- Le support de  $\overline{g}_i$  est inclus dans  $\Pi$ .

Dans la suite, on travaille systématiquement dans une base de  $\Pi$  afin de considérer les applications  $\overline{g}_1$  et  $\overline{g}_2$  comme des immersions de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Supposons par l'absurde que  $m > 2$ , alors d'après le lemme 3.6, il existe  $v \in \mathbb{S}^{m-1}$  tel que pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , l'application  $\pi_v \circ \overline{g}_i$  soit une immersion. Par ailleurs, d'après le lemme 3.8,  $\overline{g}_i$  et  $\pi_v \circ \overline{g}_i$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ . Dès lors, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on déduit que l'on a :

- Les immersions  $g_i$  et  $\pi_v \circ \overline{g}_i$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .
- Le support de  $\pi_v \circ \overline{g}_i$  est inclus dans  $v^\perp$ .

Finalement, par minimalité de  $m$  pour ces propriétés, il vient :

$$m \leq \dim(v^\perp) = m - 1,$$

ce qui n'est pas, ainsi, on a  $m \leq 2$ . Or, d'après la proposition 1.1, on a  $m > 1$ , car il n'existe pas d'immersion de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}$ . D'où  $m = 2$  et le résultat annoncé. ■

**Remarque 3.10.** Le corollaire 3.9 signifie que tout couple de composantes connexes par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  admet des représentants dont les supports sont inclus dans un même plan de  $\mathbb{R}^n$ .

On peut désormais faire la preuve du théorème 3.1, plus précisément on va montrer que  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  est connexe par arcs dès que  $n \geq 4$  :

*Preuve.* Soient  $g_1$  et  $g_2$  dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , il s'agit de montrer que les applications  $g_1$  et  $g_2$  sont dans une même composante connexe par arcs. Or, d'après le corollaire 3.9, il existe un plan  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^n$ , ainsi que  $\overline{g}_1$  et  $\overline{g}_2$  des applications de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  tels que pour tout  $i \in \{1, 2\}$  :

- Les immersions  $g_i$  et  $\overline{g}_i$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .
- Le support de  $\overline{g}_i$  est inclus dans  $\Pi$ .

Dans la suite, on travaille systématiquement dans une base de  $\mathbb{R}^n$  obtenue en complétant une base de  $\Pi$  de telle manière à ce que pour  $i \in \{1, 2\}$ , on ait :

$$\overline{g}_i := (\overline{g}_{i1}, \overline{g}_{i2}, 0, \dots, 0).$$

On introduit également l'application  $\tilde{g}_2$  de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  définie par :

$$\tilde{g}_2(x) := (0, 0, \overline{g}_{21}(x), \overline{g}_{22}(x), 0, \dots, 0).$$

On remarque alors que  $\overline{g}_2$  et  $\tilde{g}_2$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , pour cela il suffit de considérer l'application  $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$  définie par :

$$F(x, t) := (1 - t)\overline{g}_2(x) + t\tilde{g}_2(x).$$

Quel que soit  $t \in [0, 1]$ , l'application  $F(\cdot, t)$  est une immersion puisque pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ , les vecteurs  $\overline{g}_2'(x)$  et  $\tilde{g}_2'(x)$  sont libres. Dès lors, il suffit pour conclure de montrer que  $\overline{g}_1$  et  $\tilde{g}_2$  sont homotopes dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ .

Pour ce faire, on considère l'application  $G: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$  définie par :

$$G(x, t) := (1 - t)\overline{g}_1(x) + t\tilde{g}_2(x).$$

Encore une fois, quel que soit  $t \in [0, 1]$ , l'application  $G(\cdot, t)$  est une immersion, puisque pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$ , les vecteurs  $\overline{g}_1'(x)$  et  $\tilde{g}_2'(x)$  sont libres dans  $\mathbb{R}^n$ . D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque 3.11.** Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux immersions de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , l'homotopie radiale  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $g_1$  à  $g_2$  définie par :

$$H(x, t) := (1 - t)g_1(x) + tg_2(x)$$

n'est pas systématiquement une immersion à  $t$  fixé. En effet, s'il existe  $x \in \mathbb{S}^1$  tel que  $g_1'(x)$  et  $g_2'(x)$  soient colinéaires, alors il peut exister  $t \in [0, 1]$  tel que :

$$\frac{dH}{dx}(x, t) = 0.$$

Il s'agit précisément du phénomène observé dans la remarque 2.24.

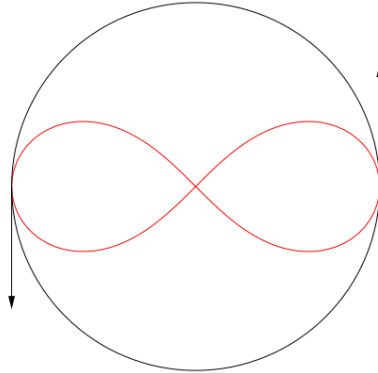


FIGURE 17. Des immersions associées au cercle et à la figure en huit qui sont non-transverses.

Réciproquement, s'il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $H(\cdot, t)$  ne soit pas une immersion, alors pour un certain  $x \in \mathbb{S}^1$ , les vecteurs  $g_1'(x)$  et  $g_2'(x)$  sont colinéaires. Cette simple observation étant faite, l'idée de la preuve du théorème 3.1 est alors naturelle et toute donnée : il s'agit de perturber les immersions  $g_1$  et  $g_2$ , sans changer leurs composantes connexes par arcs dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , de sorte à ce que leurs supports soient *transverses* en chaque point.

**Remarque 3.12.** En vertu du corollaire 3.9, la stratégie que l'on a décrite dans la remarque 3.11 est sans peine mise en œuvre en dimension au moins 4. En effet, il s'agit de remarquer que sous cette condition, il est toujours possible de séparer deux plans de sorte à ce que leur intersection soit réduite à  $\{0\}$ . En dimension 3, la situation est *a contrario* légèrement plus délicate, puisque l'intersection de deux plans contient toujours une droite.

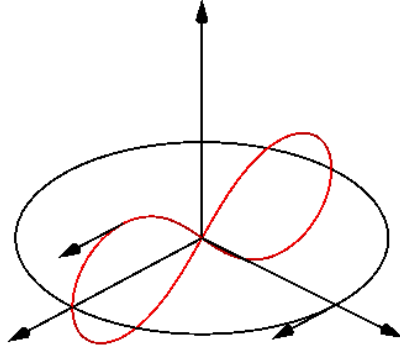


FIGURE 18. Un exemple de cas pathologique en dimension 3.

**Remarque 3.13.** Dans la preuve du théorème 3.1, on a seulement établi la connexité par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  et non de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , pour  $n \geq 4$ . Cependant, toute immersion de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$  étant homotope dans  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  à une immersion de classe  $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , voir [8], on a le résultat sans plus d'effort.

**Remarque 3.14.** On revient sur l'heuristique décrite dans la remarque 2.25. Pour ce faire, on commence par définir  $c \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$  par :

$$c(x) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), 0, \dots, 0).$$

Soit  $g \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ , on constate alors que l'on a  $\bar{g} := (g, 0, \dots, 0) \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ . Finalement, d'après le théorème 3.1,  $\bar{g}$  et  $c$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ , ce qui prouve l'affirmation de la remarque 2.25.

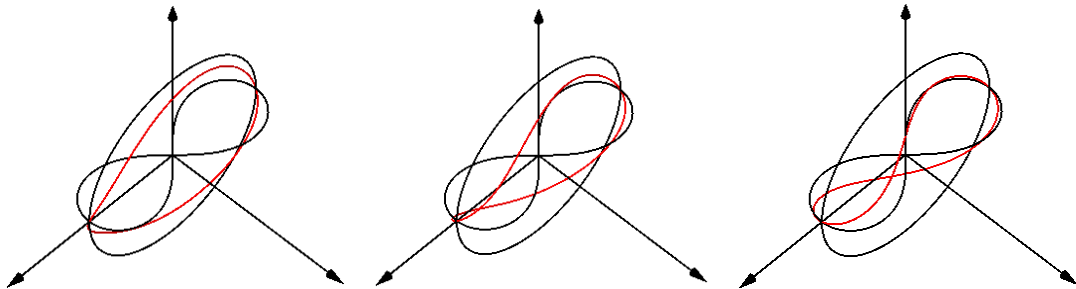


FIGURE 19. Désentrelacement de la figure en huit.

## ANNEXE A. SUR LES PARAMÉTRAGES NORMAUX D'UN ARC RÉGULIER

Soit  $n \geq 2$ , on munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme euclidienne standard que l'on note  $\|\cdot\|$ . Soit  $g$  une application de classe  $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$  dont la dérivée ne s'annule pas.

## A.1. Longueur et abscisses curvilignes d'un arc régulier.

**Définition A.1.** Soit  $(a, b) \in [0, 1]^2$  tel que  $a \leq b$ , on appelle *longueur d'arc* de  $g$  entre  $a$  et  $b$  le scalaire positif suivant :

$$\ell(g, a, b) := \int_a^b \|g'(t)\| dt.$$

La *longueur* de  $g$  simplement notée  $\ell(g)$  est égale à  $\ell(g, 0, 1) > 0$ .

**Définition A.2.** Une application  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est *abscisse curviligne* de  $g$  si et seulement si pour tout  $(a, b) \in [0, 1]^2$  tel que  $a \leq b$ , on a :

$$\ell(g, a, b) = \sigma(b) - \sigma(a).$$

**Proposition A.3.** Les abscisses curvilignes de  $g$  sont exactement les primitives de l'application continue  $\|g'\|: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ .

*Preuve.* On procède par double implication.

- Soit  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une abscisse curviligne de  $g$ , alors on a :

$$\forall s \in [0, 1], \sigma(s) - \sigma(0) = \ell(g, s, 0) := \int_0^s \|g'(t)\| dt.$$

Dès lors,  $\sigma$  est de classe  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$  et par différentiation, il vient :

$$\forall s \in [0, 1], \sigma'(s) = \|g'(s)\|.$$

Finalement,  $\sigma$  est une primitive de  $\|g'\|$ .

- Soient  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une primitive de  $\|g'\|$  et  $(a, b) \in [0, 1]^2$  tel que  $a < b$ . Ainsi, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a :

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \int_a^b \|g'(t)\| dt =: \ell(g, a, b).$$

Finalement,  $\sigma$  est une abscisse curviligne de  $g$ .

D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque A.4.** La propriété A.3 assure l'existence d'une infinité d'abscisses curvilignes pour  $g$  et elles diffèrent toutes d'une constante additive.

**Lemme A.5.** Soit  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une abscisse curviligne de  $g$ , alors  $\sigma$  est un  $C^1$ -difféomorphisme croissant sur son image.

*Preuve.* L'application  $\sigma$  est de classe  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$  et pour tout  $s \in [0, 1]$ , on a :

$$\sigma'(s) = \|g'(s)\| > 0.$$

Dès lors,  $\sigma$  est strictement croissante. Finalement, d'après le théorème d'inversion globale,  $\sigma$  est un  $C^1$ -difféomorphisme croissant sur son image. ■

## A.2. Paramétrages normaux d'un arc régulier.

**Définition A.6.** Soit  $I$  un intervalle et  $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$  un  $C^1$ -difféomorphisme, alors  $\lambda$  est un *paramétrage normal* de  $g$  si et seulement si  $\|(g \circ \lambda)'\| = 1$ .

**Proposition A.7.** Soit  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une abscisse curviligne de  $g$  d'image  $I$ , alors  $\lambda := \sigma^{-1}: I \rightarrow [0, 1]$  est un paramétrage normal croissant de  $g$ .

*Preuve.* Notons que d'après le lemme A.5,  $\lambda$  est correctement définie et il s'agit d'un  $C^1$ -difféomorphisme croissant de  $I$  sur  $[0, 1]$ . De plus, par différentiation de l'égalité  $\sigma \circ \lambda = \text{id}_I$  et d'après la proposition A.3, on a :

$$\lambda' = \frac{1}{\sigma' \circ \lambda} = \frac{1}{\|g'\| \circ \lambda}.$$

En particulier, on en déduit que pour tout  $t \in I$ , on a :

$$\|(g \circ \lambda)'(t)\| = |\lambda'(t)| \cdot \|g'(\lambda(t))\| = \frac{\|g'(\lambda(t))\|}{\|g'(\lambda(t))\|} = 1.$$

Finalement,  $\lambda$  est un paramétrage normal de  $g$ . ■

**Remarque A.8.** La remarque A.4 et la proposition A.7 assurent l'existence d'une infinité de paramétrages normaux croissants de  $g$ .

**Proposition A.9.** Soit  $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$  un paramétrage normal de  $g$ , alors selon la monotonie de  $\lambda$ , l'application  $\lambda^{-1}$  ou  $-\lambda^{-1}$  est une abscisse curviligne de  $g$ .

*Preuve.* Par définition d'un paramétrage normal, on a l'égalité suivante :

$$|\lambda'| \cdot \|g' \circ \lambda\| = 1.$$

Or,  $\lambda$  étant un  $C^1$ -difféomorphisme,  $\lambda'$  est continue et elle ne s'annule pas. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\lambda'$  est de signe constant sur l'intervalle  $I$ , c'est-à-dire  $|\lambda'| = \pm \lambda'$  et d'après l'égalité précédente, il vient :

$$(1) \quad \lambda' = \pm \frac{1}{\|g' \circ \lambda\|}.$$

Or, par différentiation de l'égalité  $\lambda \circ \lambda^{-1} = \text{id}_{[0,1]}$ , on a :

$$(2) \quad (\lambda^{-1})' = \frac{1}{\lambda' \circ \lambda^{-1}}.$$

Dès lors, en rapprochant les égalités (1) et (2), il vient :

$$(\lambda^{-1})' = \pm \frac{1}{1/\|g' \circ \lambda \circ \lambda^{-1}\|} = \pm \|g'\|.$$

Finalement, d'après la proposition A.3,  $\pm \lambda^{-1}$  est une abscisse curviligne de  $g$ . D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque A.10.** La proposition A.9 assure que tous les paramétrages normaux croissants de  $g$  s'obtiennent en procédant comme dans la proposition A.7. Les paramétrages normaux décroissants de  $g$  sont exactement leurs opposés.

**Proposition A.11.** Soit  $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$  un paramétrage normal de  $g$ , il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$  tel que  $I = [a, b]$  et on a alors  $\ell(g) = b - a$ .

*Preuve.* Par définition,  $I$  est l'image de  $[0, 1]$  par l'application continue  $\lambda^{-1}$ . Dès lors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $I$  est un intervalle qui est de surcroît compact et il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $a < b$  tel que  $I = [a, b]$ . En outre, comme  $\lambda$  est un paramétrage normal, on a :

$$(3) \quad \int_a^b \|(g \circ \lambda)'(t)\| dt = b - a.$$

Or, comme  $\lambda$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $[a, b]$  sur  $[0, 1]$ , on a :

$$(4) \quad \int_a^b \|(g \circ \lambda)'(t)\| dt = \int_a^b \|g(\lambda(t))\| \cdot |\lambda'(t)| dt = \int_0^1 \|g'(t)\| dt =: \ell(g).$$

D'où le résultat annoncé en rapprochant (3) et (4). ■

**Définition A.12.** Soit  $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$  un paramétrage normal de  $g$ , on dit que  $\lambda$  est *standard* si et seulement si  $\lambda$  est croissant et  $I = [0, \ell(g)]$ .

**Proposition A.13.** Il existe des paramétrages normaux standards de  $g$ .

*Preuve.* Soit  $\lambda: I \rightarrow [0, 1]$  un paramétrage normal croissant de  $g$ , alors d'après la proposition A.11, il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $I = [a, b]$  et on a alors :

$$\ell(g) = b - a.$$

On remarque que  $\lambda - a$  est un paramétrage normal et il a pour domaine :

$$\{a\} + I = [0, b - a] = [0, \ell(g)].$$

D'où le résultat annoncé puisque  $\lambda - a$  est croissant. ■

## ANNEXE B. PETIT GLOSSAIRE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

Dans cette annexe, on présente les notions de base sur les variétés différentielles.

## B.1. Notions de cartes, atlas et variétés.

Soit  $M$  un espace topologique séparé.

**Définition B.1.** Une *carte* de  $M$  est un couple  $(U, \phi)$ , où  $U$  est un ouvert dit *domaine* de la carte et  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme sur son image.

**Exemple B.2.** Soit  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , on introduit alors  $N_\varepsilon := (0, \dots, 0, \varepsilon) \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $U_\varepsilon := \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N_\varepsilon\}$ , ainsi que l'application  $p_{N_\varepsilon}: U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  définie par :

$$p_{N_\varepsilon}(x) := \left( \frac{x_i}{1 - \varepsilon x_n} \right)_{1 \leq i \leq n-1}.$$

Il s'agit la projection stéréographique de pôle  $N_\varepsilon$  sur l'hyperplan équatorial. Son application réciproque est donnée par :

$$p_{N_\varepsilon}^{-1}(x) := \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\varepsilon(\|x\|^2 - 1)}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

Finalement, le couple  $(U_\varepsilon, p_{N_\varepsilon})$  est une carte de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

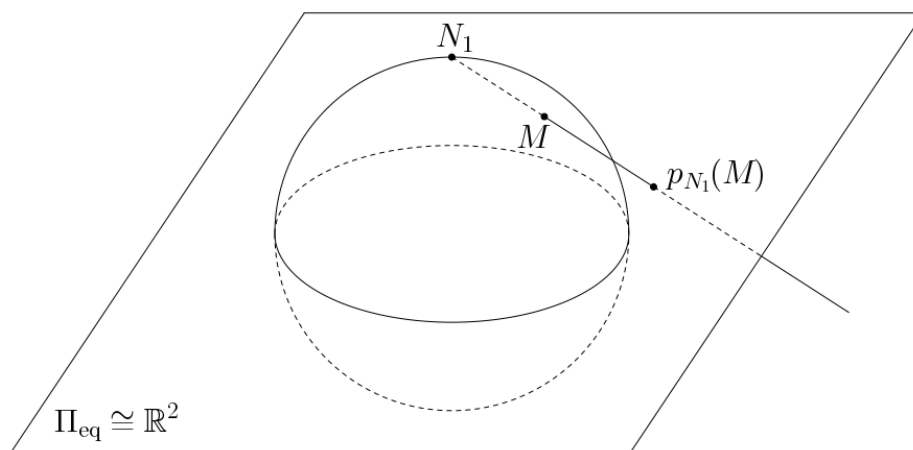


FIGURE 20. La projection stéréographique de pôle  $N_1$  sur le plan équatorial de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

**Exemple B.3.** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $V_k := \{x := [x_i]_{0 \leq i \leq n}; x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}P^n$ , ainsi que l'application  $\phi_k: V_k \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par :

$$\phi_k(x) = \left( \frac{x_i}{x_k} \right)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}}.$$

Son application réciproque est donnée par :

$$\phi_k^{-1}(x) = \begin{cases} [1 : x_1 \cdots : x_n] & k = 0 \\ [x_1 : \cdots : x_{k-1} : 1 : x_k : x_{k+1} : \cdots : x_n] & k \neq 0, n \\ [x_1 : \cdots : x_n : 1] & k = n \end{cases}$$

Finalement, le couple  $(V_k, \phi_k)$  est une carte de l'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$ .



**Définition B.4.** Soient  $p \in M$  et  $(U, \phi)$  une carte de  $M$ , alors  $(U, \phi)$  est *centrée* en  $p$  si et seulement si  $p \in U$  et  $\phi(p) = 0$ .

**Remarque B.5.** Soit  $p \in M$ , s'il existe  $(U, \phi)$  une carte de  $M$  avec  $p \in U$ , alors on peut toujours supposer  $(U, \phi)$  centrée en  $p$  quitte à translater  $\phi$ .

**Définition B.6.** Soit  $\mathfrak{A} := \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  un système de cartes de  $M$ , alors  $\mathfrak{A}$  est un *atlas* de  $M$  si et seulement si  $\{U_i\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $M$ .

**Exemple B.7.** En reprenant les notations de l'exemple B.2, le système :

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{S}^{n-1}} := \{(U_1, p_{N_1}), (U_{-1}, p_{N_{-1}})\}$$

est un atlas de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Exemple B.8.** En reprenant les notations de l'exemple B.3, le système :

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{R}P^n} := \{(V_k, \phi_k)\}_{0 \leq k \leq n}$$

est un atlas de l'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$ .

**Définition B.9.** Soit  $\mathfrak{A} := \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  un atlas de  $M$ , alors  $\mathfrak{A}$  est un atlas  *$n$ -dimensionnel* si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,  $\phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Définition B.10.** L'espace topologique  $M$  est une *variété topologique* de *dimension*  $n$  si et seulement s'il est muni d'un atlas  $n$ -dimensionnel.

**Remarque B.11.** Concrètement, une variété topologique de dimension  $n$  est obtenue en recollant des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque B.12.** Si  $M$  est une variété topologique compacte, alors d'après le théorème de Borel-Lebesgue, il existe un atlas fini de  $M$ .

**Exemple B.13.** La sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  une variété topologique de dimension  $n - 1$ .

**Exemple B.14.** L'espace  $\mathbb{R}P^n$  une variété topologique de dimension  $n$ .

**Définition B.15.** Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$  et soit  $\mathfrak{A} := \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  un atlas  $n$ -dimensionnel de  $M$ , alors les *applications de changements de cartes* ou *applications de recollement* de  $\mathfrak{A}$  sont les :

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

définies pour tout  $(i, j) \in I^2$ , avec  $i \neq j$ .

**Exemple B.16.** Les changements de cartes de l'atlas  $\mathfrak{A}_{\mathbb{S}^{n-1}}$  sont donnés par :

$$p_{N_{-1}} \circ p_{N_1}^{-1}(x) = \left( -\frac{x_i}{\|x\|^2} \right)_{1 \leq i \leq n-1} = p_{N_1} \circ p_{N_{-1}}^{-1}(x).$$

Il s'agit de l'opposée de l'inversion de sphère de centre 0 et de rayon 1.

**Exemple B.17.** Les changements de cartes de l'atlas  $\mathfrak{A}_{\mathbb{R}P^n}$  sont donnés par :

$$\phi_k \circ \phi_\ell^{-1}(x) = \begin{cases} \left( \frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_{\ell-1}}{x_k}, \frac{1}{x_k}, \frac{x_{\ell+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right) & k < \ell \\ \left( \frac{x_1}{x_{k-1}}, \dots, \frac{x_{\ell-1}}{x_{k-1}}, \frac{1}{x_{k-1}}, \frac{x_{\ell+1}}{x_{k-1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{k-1}} \right) & \ell < k \end{cases}$$

quel que soit le couple  $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  avec  $k \neq \ell$ .

**Définition B.18.** Soit  $M$  une variété topologique, alors  $M$  est une *variété différentielle* de dimension  $n$  si et seulement si elle est munie d'un atlas  $n$ -dimensionnel dont les applications de recollement sont de classe  $C^\infty$ .

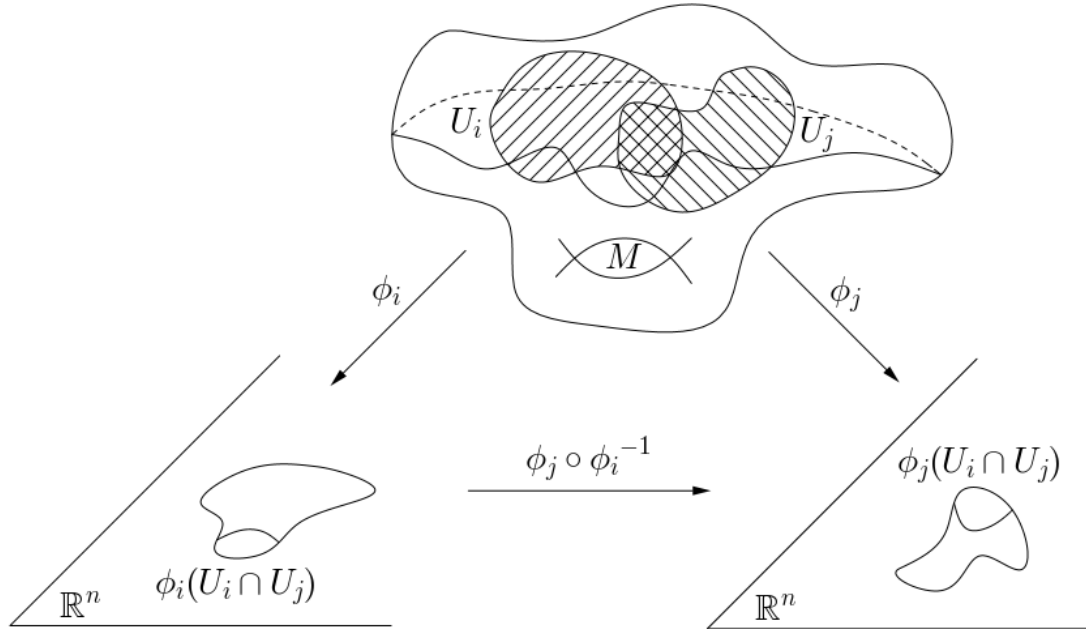


FIGURE 21. Représentation d'un changement de carte d'un atlas.

**Remarque B.19.** Si  $(M, \mathfrak{A})$  est une variété différentielle, alors les applications de recollement de  $\mathfrak{A}$  sont des  $C^\infty$ -difféomorphismes.

**Exemple B.20.** La sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  une variété différentielle de dimension  $n - 1$ .

**Exemple B.21.** L'espace  $\mathbb{R}P^n$  une variété différentielle de dimension  $n$ .

## B.2. Sur les espaces tangents d'une variété différentielle.

Soient  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ ,  $p$  un point de  $M$ , ainsi que  $(U, \phi)$  une carte de  $M$  centrée en  $p$ .

**Définition B.22.** Une *courbe* de  $M$  passant par  $p$  est une application continue  $c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  définie sur un voisinage de 0 satisfaisant  $c(0) = p$  et telle que :

$$\phi \circ c: c^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

soit une application de classe  $C^\infty$  en 0.

**Remarque B.23.** La continuité de  $c$  assure que  $c^{-1}(U)$  est un ouvert de  $]-1, 1[$  qui contient 0, ainsi on peut sans peine parler de la régularité de  $\phi \circ c$  en 0. En particulier, la définition B.22 est raisonnable.

**Remarque B.24.** Les changements de cartes de  $M$  étant  $C^\infty$ , la définition B.22 est indépendante de la carte de  $M$  centrée en  $p$  choisie.

**Notation B.25.** Soit  $\Omega_p M$  l'ensemble des courbes de  $M$  qui passent par  $p$ .

**Définition B.26.** Soit  $(c_1, c_2) \in \Omega_p M^2$ , alors  $c_1$  et  $c_2$  sont *tangentes* en  $p$  si et seulement si on a  $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$ .

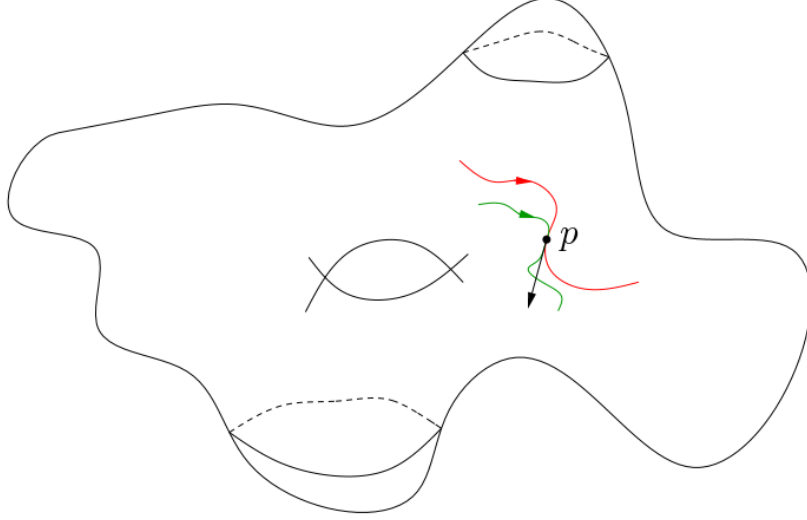


FIGURE 22. Illustration de la notion de tangence en un point.

**Proposition B.27.** On se donne  $(V, \psi)$  une autre carte de  $M$  centrée en  $p$ . Soit  $(c_1, c_2) \in \Omega_p M^2$ , alors  $c_1$  et  $c_2$  sont tangentes en  $p$  si et seulement si, on a :

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0).$$

*Preuve.* Soit  $i \in \{1, 2\}$ , sur l'ouvert  $c_i^{-1}(U \cap V)$  contenant 0, on a :

$$\psi \circ c_i = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_i).$$

Dès lors, par différentiation en 0 et comme  $\phi \circ c_i(0) = 0$ , il vient :

$$(1) \quad d_0(\psi \circ c) = d_0(\psi \circ \phi^{-1}) \circ d_0(\phi \circ c).$$

Dès lors, en évaluant l'égalité (1) au point 1, on a :

$$(2) \quad (\psi \circ c_i)'(0) = d_0(\psi \circ \phi^{-1}) \cdot (\phi \circ c_i)'(0).$$

Or,  $\psi \circ \phi^{-1}$  étant un  $C^\infty$ -difféomorphisme,  $d_0(\psi \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est injective. Finalement, d'après (2), on en déduit que l'on a :

$$(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0) \Leftrightarrow (\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0).$$

D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque B.28.** La proposition B.27 signifie que la définition B.26 est totalement indépendante de la carte de  $M$  centrée en  $p$  choisie.

**Proposition B.29.** La relation de tangence en  $p$  est d'équivalence sur  $\Omega_p M$ .

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate de la réflexivité, symétrie et transitivité de la relation d'égalité sur  $M$ . ■

**Définition B.30.** Soit  $c \in \Omega_p M$ , la classe d'équivalence de  $c$  pour la relation de tangence au point  $p$  est notée  $[c]$ , il s'agit d'un *vecteur tangent* à  $M$  en  $p$ . Leur ensemble noté  $T_p M$  est appelé *espace tangent* de  $M$  en  $p$ .

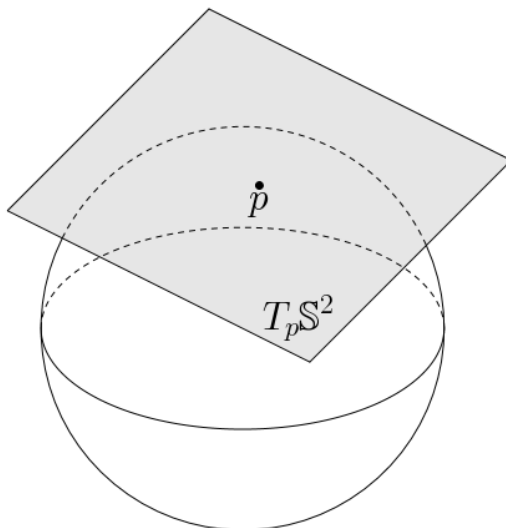


FIGURE 23. Un espace tangent d'une sphère en un point.

**Proposition B.31.** Le quotient  $T_p M$  est un espace-vectoriel de dimension  $n$ .

*Preuve.* On commence par introduire l'application suivante :

$$\varphi: \begin{cases} T_p M & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ [c] & \mapsto & (\phi \circ c)'(0) \end{cases} .$$

On va montrer que  $\varphi$  est une bijection bien définie.

1. Soit  $(c_1, c_2) \in \Omega_p M$  tangentes en  $p$ , alors par définition, on a :

$$(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0).$$

Finalement,  $\varphi$  ne dépend pas des représentants choisis dans  $T_p M$ .

2. Soient  $[c_1]$  et  $[c_2]$  dans  $T_p M$  telles que  $\varphi([c_1]) = \varphi([c_2])$ , alors par définition les courbes  $c_1$  et  $c_2$  sont tangentes en  $p$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$[c_1] = [c_2].$$

Finalement,  $\varphi$  est injective.

3. Soit  $v$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on constate que  $\phi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  qui contient 0. Par conséquent, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , on ait :

$$tv \in \phi^{-1}(U).$$

Par conséquent, comme  $\phi: U \subseteq M \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme, on peut définir une application continue  $c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  par :

$$c(t) := \phi^{-1}(tv).$$

On constate alors que  $c \in \Omega_p M$  ; en effet comme  $\phi(p) = 0$ , on a  $c(0) = p$ . En outre, l'application  $\phi \circ c$  est  $C^\infty$ , puisque pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , on a :

$$\phi \circ c(t) = tv$$

En particulier, de cette dernière égalité, on déduit que l'on a :

$$\varphi([c]) = v.$$

Finalement,  $\varphi$  est surjective.

Finalement, on peut transporter la structure vectorielle de  $\mathbb{R}^n$  à  $T_p M$  par  $\varphi$ . De manière explicite, pour  $([c_1], [c_2]) \in \Omega_p M^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$\begin{aligned} [c_1] + [c_2] &:= \varphi^{-1}(\varphi([c_1]) + \varphi([c_2])) \\ \lambda[c_1] &:= \varphi^{-1}(\lambda\varphi([c_1])) \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque B.32.** La remarque B.28 assure que la structure vectorielle définie sur  $T_p M$  est indépendante de la carte de  $M$  centrée en  $p$  choisie.

**Définition B.33.** Le *fibré tangent* de  $M$  noté  $TM$  est la somme ensembliste de tous les espaces tangents de  $M$  en tous ses points, c'est-à-dire que l'on a :

$$TM := \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M).$$

**Remarque B.34.** Le fibré tangent de  $M$  peut être muni d'une structure de variété différentielle de dimension  $2n$  indépendante des cartes de  $M$ , voir [9].

### B.3. Applications différentiables entre variétés différentielles.

Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentielles de dimensions respectives  $m$  et  $n$ . Soit  $p$  un point de  $M$  et soit  $f: M \rightarrow N$  une application continue.

B.3.1. *Régularité d'une application entre variétés différentielles.*

**Définition B.35.** L'application  $f$  est  $C^\infty$  en  $p$  si et seulement s'il existe  $(U, \phi)$  une carte de  $M$  centrée en  $p$ ,  $(V, \psi)$  une carte de  $N$  centrée en  $f(p)$  telles que :

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

soit une application de classe  $C^\infty$  en 0.

**Remarque B.36.** La continuité de  $f$  assure que  $\phi(f^{-1}(V) \cap U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  qui contient 0, ainsi on peut sans peine parler de la régularité de l'application  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  en 0. En particulier, la définition B.35 est raisonnable.

**Remarque B.37.** Les changements de cartes des variétés  $M$  et  $N$  étant  $C^\infty$ , la définition B.35 ne dépend pas des cartes choisies.

**Définition B.38.** L'application  $f$  est de classe  $C^\infty(M, N)$  si et seulement si elle est  $C^\infty$  en tout point de  $M$ .

B.3.2. *La différentielle d'une application entre variétés différentielles.*

**Définition-Proposition B.39.** Si  $f$  est de classe  $C^\infty$  en  $p$ , alors la *différentielle* de  $f$  en  $p$  est l'application  $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  définie par :

$$d_p f([c]) := [f \circ c].$$

Il s'agit d'une application correctement définie : l'image d'un élément de  $T_p M$  ne dépend pas du représentant choisi dans  $\Omega_p M$ .

*Preuve.* Soit  $(c_1, c_2) \in \Omega_p M^2$  tangentes en  $p$ . On se donne aussi  $(U, \phi)$  une carte de  $M$  centrée en  $p$  et  $(V, \psi)$  une carte de  $N$  centrée en  $f(p)$  telles que :

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \psi(V) \text{ soit } C^\infty \text{ en } 0.$$

Soit alors  $i \in \{1, 2\}$ , on remarque que sur l'ouvert  $c_i^{-1}(f^{-1}(V) \cap U) \ni 0$ , on a :

$$(3) \quad \psi \circ (f \circ c_i) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c_i).$$

Or, d'après la remarque B.24, l'application  $\phi \circ c_i$  est de classe  $C^\infty$  au point 0. Ainsi, d'après (3) et comme  $(\phi \circ c_i)(0) = 0$ ,  $\psi \circ (f \circ c_i)$  est de classe  $C^\infty$  en 0. Finalement, comme  $(f \circ c_i)(0) = f(p)$ , pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , il vient :

$$f \circ c_i \in \Omega_{f(p)} N.$$

Pour conclure, il s'agit de montrer que  $f \circ c_1$  et  $f \circ c_2$  sont tangentes en  $f(p)$ . Soit  $i \in \{1, 2\}$ , comme  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  en 0 et que  $(\phi \circ c_i)(0) = 0$ , par différentiation de l'égalité (3) en 0, on a :

$$(4) \quad d_0(\psi \circ (f \circ c_i)) = d_0(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ d_0(\phi \circ c_i).$$

Dès lors, en évaluant l'égalité (4) au point 1, il vient :

$$(\psi \circ c_i)'(0) = d_0(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \cdot (\phi \circ c_i)'(0).$$

Finalement, comme par hypothèse  $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$ , on a :

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0).$$

D'où le résultat annoncé. ■

**Proposition B.40.** Si  $f$  est de classe  $C^\infty$  au point  $p$ , alors la différentielle de  $f$  en  $p$  est une application linéaire.

*Preuve.* Il s'agit de se rappeler de la structure vectorielle des espaces tangents. ■

**Définition B.41.** Si  $f$  est de classe  $C^\infty(M, N)$ , alors la *différentielle* de  $f$  est l'application  $df: TM \rightarrow TN$  définie par :

$$df(p, v) := d_p f(v).$$

**Remarque B.42.** Soit  $f$  de classe  $C^\infty(M, N)$ , comme le fibré tangent d'une variété différentielle est lui-même muni d'une structure de variété différentielle, on peut récursivement définir les différentielles d'ordre supérieurs de  $f$ .

B.3.3. *Quelques applications régulières entre variétés différentielles.*

**Définition B.43.** L'application  $f$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme si et seulement si elle est  $C^\infty(M, N)$  et qu'il existe  $g: N \rightarrow M$  de classe  $C^\infty(N, N)$  telle que :

$$g \circ f = \text{id}_M \text{ et } f \circ g = \text{id}_N.$$

**Exemple B.44.** Si  $(U, \phi)$  est une carte de  $M$ , alors l'application  $\phi: U \rightarrow \phi(U)$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

**Définition B.45.** Soit  $p \in M$ , l'application  $f$  est une *immersion* en  $p$  si et seulement si elle est  $C^\infty$  en  $p$  et  $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  est injective.

**Définition B.46.** L'application  $f$  est une *immersion* si et seulement si c'est une immersion en tout point de  $M$ .

**Remarque B.47.** Un  $C^\infty$ -difféomorphisme est une immersion.

**Définition B.48.** L'application  $f$  est un *plongement* si et seulement si c'est une immersion en tout point de  $M$  et un homéomorphisme sur son image.

**Définition B.49.** Soit  $p \in M$ , l'application  $f$  est une *submersion* en  $p$  si et seulement si elle est  $C^\infty$  en  $p$  et  $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  est surjective.

**Définition B.50.** L'application  $f$  est une *submersion* si et seulement si c'est une submersion en tout point de  $M$ .

**Remarque B.51.** Un  $C^\infty$ -difféomorphisme est une submersion.

## ANNEXE C. LA GÉNÉRICITÉ DANS LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Cette annexe est consacrée à la formalisation de la notion de propriété générique, c'est-à-dire correspondant à l'intuition du vrai presque partout.

## C.1. Ensembles négligeables d'une variété différentiable.

C.1.1. Le cas des espaces  $\mathbb{R}^n$ .

On commence par décrire la situation dans les espaces  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 1$ .

**Définition C.1.** Soit  $C$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $C$  est un  $n$ -pavé si et seulement s'il existe  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$  et  $(b_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $a_i < b_i$  tels que :

$$C = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

**Définition C.2.** Soit  $C := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  un  $n$ -pavé, alors son *volume* noté  $\text{vol}(C)$  est défini comme étant le réel positif suivant :

$$\text{vol}(C) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

**Remarque C.3.** Soient  $C$  un  $n$ -pavé et  $\lambda$  un scalaire strictement positif, alors :

$$\text{vol}(\lambda C) = \lambda^n \cdot \text{vol}(C).$$

**Définition C.4.** Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $E$  est un *ensemble négligeable* de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $(C_k(\varepsilon))_{k \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de  $n$ -pavés qui recouvre  $E$  et qui satisfait :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \text{vol}(C_k(\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

**Remarque C.5.** Un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  est négligeable si et seulement s'il est de mesure de Lebesgue nulle. En particulier, il est mesurable.

**Exemple C.6.** Si  $E$  est un sous-ensemble au plus dénombrable de  $\mathbb{R}^n$ , alors il est négligeable dans  $\mathbb{R}^n$ . En effet, soit  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une énumération de ces éléments, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a  $e_i := (x_{i,k})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors pour  $i \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$C_i(\varepsilon) := \prod_{k=1}^n \left[ x_{i,k} - \left( \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right)^{1/n}, x_{i,k} + \left( \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right)^{1/n} \right].$$

Par construction,  $C_i(\varepsilon)$  est un  $n$ -pavé qui contient  $e_i$  et l'on a :

$$\text{vol}(C_i(\varepsilon)) = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Finalement,  $(C_i(\varepsilon))_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille dénombrable de  $n$ -pavés qui recouvre l'ensemble  $E$  et qui satisfait l'égalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \text{vol}(C_i(\varepsilon)) = \varepsilon.$$



**Proposition C.7.** Une union dénombrable d'ensembles négligeables de  $\mathbb{R}^n$  est encore un ensemble négligeable de  $\mathbb{R}^n$ .

*Preuve.* Soit  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable d'ensembles négligeables de  $\mathbb{R}^n$ . On introduit alors  $E$  leur union :

$$E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $(C_{k,\ell}(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de  $n$ -pavés qui recouvre  $E_k$  et qui satisfait :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(C_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

On en déduit que  $(C_{k,\ell}(\varepsilon))_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$  est une famille dénombrable de  $n$ -pavés qui recouvre l'ensemble  $E$  et qui satisfait l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(C_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

D'où le résultat annoncé. ■

### C.1.2. Le cas des variétés différentielles abstraites.

Sur une variété différentiable abstraite, on se ramène à la situation décrite dans la sous-partie C.1.1 par l'intermédiaire de ses cartes ; on aura alors besoin du :

**Lemme C.8.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ . Si  $E$  est un ensemble négligeable de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $f(E)$  est encore négligeable.

*Preuve.* Comme  $U$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de boules ouvertes qui recouvre  $U$ , alors comme  $E$  est inclus dans  $U$ , il vient :

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E \cap B_k.$$

Dès lors, en prenant l'image directe par  $f$  de l'égalité précédente, il vient :

$$f(E) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(E \cap B_k).$$

Ainsi, d'après la proposition C.7, il suffit de montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $f(E \cap B_k)$  est négligeable dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $(C_\ell(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de  $n$ -pavés recouvrant  $E$  et satisfaisant :

$$(1) \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(C_\ell(\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Soit  $\|\cdot\|$  la norme d'opérateur sur  $\text{End}(\mathbb{R}^n)$  associée à la norme infini sur  $\mathbb{R}^n$ . L'application  $df$  étant continue sur le compact  $\overline{B_k}$ , il existe  $M_k > 0$  tel que :

$$\forall x \in \overline{B_k}, \|d_x f\| \leq M_k.$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis<sup>2</sup>,  $f|_{B_k}$  est  $M_k$ -lipschitzienne. Dès lors,  $f(C_\ell(\varepsilon) \cap B_k)$  est contenue dans un  $n$ -pavé  $D_{k,\ell}(\varepsilon)$  satisfaisant :

$$(2) \quad \text{vol}(D_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq M_k^n \cdot \text{vol}(C_\ell(\varepsilon)).$$

Or, comme  $(C_\ell(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$  recouvre  $E$ ,  $(C_\ell(\varepsilon) \cap B_k)_{\ell \in \mathbb{N}}$  recouvre  $E \cap B_k$  et il vient :

$$f(E \cap B_k) \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} f(C_{k,\ell}(\varepsilon) \cap B_k) \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} D_{k,\ell}(\varepsilon).$$

Finalement,  $(D_{k,\ell}(\varepsilon))_{\ell \in \mathbb{N}}$  est une famille dénombrable de  $n$ -pavés qui recouvre l'ensemble  $f(E \cap B_k)$ ; par ailleurs, d'après (1) et (2), on a :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \text{vol}(D_{k,\ell}(\varepsilon)) \leq M_k^n \cdot \varepsilon.$$

D'où le résultat annoncé. ■

**Définition C.9.** Soient  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$  et  $E$  un sous-ensemble de  $M$ , alors  $E$  est un *ensemble négligeable* de  $M$  si et seulement si quel que soit  $p \in M$ , il existe  $(U, \phi)$  une carte de  $M$  centrée en  $m$  telle que l'ensemble  $\phi(E \cap U)$  soit négligeable dans  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

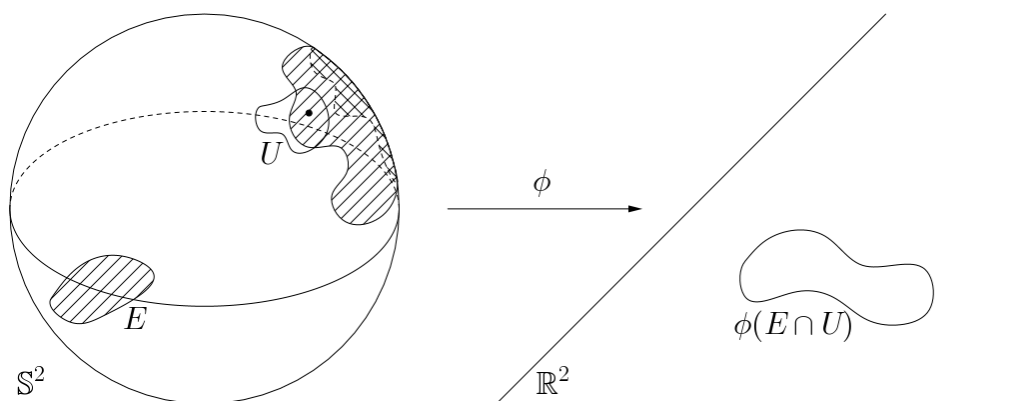


FIGURE 24. Un ensemble non négligeable de  $S^2$ .

**Remarque C.10.** La définition C.9 ne dépend pas des cartes choisies : il suffit d'appliquer le lemme C.8 aux changements de cartes de  $M$  qui sont  $C^\infty$ .

**Proposition C.11.** Soit  $M$  une variété différentielle, une réunion dénombrable d'ensembles négligeables de  $M$  est encore un ensemble négligeable de  $M$ .

*Preuve.* Il suffit d'appliquer la proposition C.7. ■

**Définition C.12.** Soit  $M$  une variété différentielle, on dit qu'une propriété est vraie *presque partout* sur  $M$  si et seulement si elle est satisfaite sur le complémentaire d'un ensemble négligeable de  $M$ .

2. Pour appliquer l'inégalité des accroissements finis, on remarquera que  $B_k$  est convexe.

## C.2. Valeurs régulières, critiques et théorème de Sard.

On énonce le théorème de Sard qui constitue un outil redoutablement efficace pour établir la généricité de certaines propriétés sur les variétés différentielles. On pourra voir ce résultat comme un raffinement du lemme C.8.

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles.

**Définition C.13.** Soient  $f: M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty(M, N)$  et  $q$  un point de  $N$ , alors  $n$  est une *valeur régulière* de  $f$  si et seulement si pour tout  $p \in f^{-1}(\{q\})$ , l'application linéaire  $d_p f: T_p M \rightarrow T_q N$  est surjective.

**Remarque C.14.** Soient  $f: M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty(M, N)$  et  $q$  un point de  $N$ . Si  $q$  n'est pas dans l'image de  $f$ , alors  $q$  est une valeur régulière de  $f$ .

**Définition C.15.** Soient  $f: M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty(M, N)$  et  $q \in N$ , alors  $q$  est une *valeur critique* de  $f$  si et seulement si ce n'est pas une valeur régulière.

**Remarque C.16.** Soient  $f: M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty(M, N)$ , alors les valeurs critiques de  $f$  sont des éléments de l'image de  $f$ .

**Définition C.17.** Un espace topologique est *dénombrable à l'infini* si et seulement s'il est réunion dénombrable de compacts.

On consultera [7] pour une preuve du classique :

**Théorème C.18.** (de Sard) Soit  $f: M \rightarrow N$  une application de classe  $C^\infty(M, N)$ . Si  $M$  est dénombrable à l'infini, alors l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est un ensemble négligeable de  $N$ .

## ANNEXE D. UN PEU DE TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE

Dans cette annexe, on s'attache à développer les notions de topologie algébrique nécessaires à la bonne compréhension de notre rapport.

## D.1. Homotopies d'applications continues.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques, on suppose  $X$  localement compact. On munit alors l'espace  $C^0(X, Y)$  de la topologie compacte-ouverte<sup>3</sup>.

**Définition D.1.** Soient  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: X \rightarrow Y$  deux applications continues, alors  $f$  et  $g$  sont *homotopes* si et seulement s'il existe une application continue  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  dite *homotopie* de  $f$  à  $g$  telle que  $H(\cdot, 0) = f$  et  $H(\cdot, 1) = g$ .

**Proposition D.2.** La relation d'homotopie est d'équivalence sur  $C^0(X, Y)$ .

*Preuve.* Soient  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: X \rightarrow Y$  et  $h: X \rightarrow Y$  continues.

1. L'application  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  définie par :

$$H(x, t) = f(x)$$

est une homotopie de  $f$  à  $f$  et la relation d'homotopie est réflexive.

2. Supposons que  $G: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  soit une homotopie de  $f$  à  $g$ , alors l'application  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  définie par :

$$H(x, t) = G(x, 1 - t)$$

est une homotopie de  $g$  à  $f$  et la relation d'homotopie est symétrique.

3. Supposons que  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  et  $G: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  soient des homotopies de  $f$  à  $g$  et de  $g$  à  $h$ , alors l'application  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  définie par :

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est une homotopie de  $f$  à  $h$  et la relation d'homotopie est transitive.

D'où le résultat annoncé. ■

Pour faire le lien entre homotopies et chemins dans  $C^0(X, Y)$ , montrons le :

**Lemme D.3.** Soient  $A$  un espace topologique,  $a_0 \in A$  et  $B$  un espace compact. Soit  $U$  un ouvert de  $A \times B$  muni de la topologie produit<sup>4</sup>, si  $U$  contient  $\{a_0\} \times B$ , alors il existe  $V$  un ouvert de  $A$  satisfaisant :

$$\{a_0\} \times B \subseteq V \times B \subseteq U.$$

3. La topologie compacte-ouverte est engendrée par les ensembles suivants :

$$V(K, U) := \{f \in C^0(X, Y) \text{ t.q } f(K) \subseteq U\},$$

où  $K$  est un compact de  $X$  et  $U$  est un ouvert de  $Y$ . Notons que si  $Y$  est un espace métrique, il s'agit seulement de la topologie de la convergence localement uniforme sur  $X$ .

4. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques, on note alors  $X$  leur produit cartésien. La topologie produit sur  $X$  est engendrée par les  $p_i^{-1}(U_i)$ , où  $p_i: X \rightarrow X_i$  est la projection sur le facteur  $X_i$  et  $U_i$  est un ouvert de  $X_i$ .

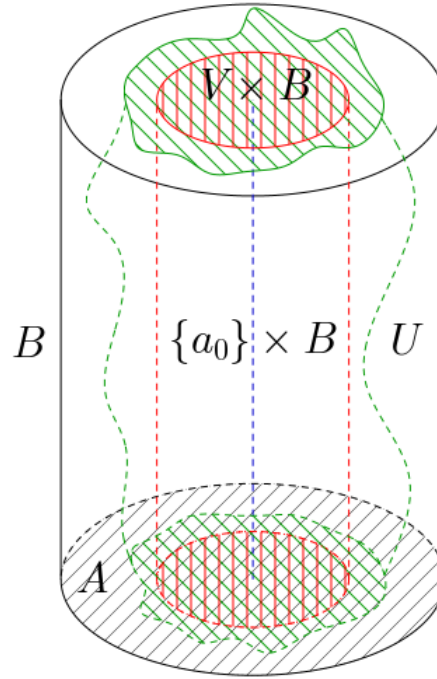


FIGURE 25. Illustration du résultat du lemme D.3.

*Preuve.* Quel que soit  $b \in B$ , on a  $(a_0, b) \in U$  qui est un ouvert de  $A \times B$ . Ainsi, par construction de la topologie produit, il existe  $V_b$  un ouvert de  $A$ , ainsi que  $W_b$  un ouvert de  $B$  tels que :

$$(1) \quad (a_0, b) \in V_b \times W_b \subseteq U.$$

On constate alors que la famille  $(W_b)_{b \in B}$  est un recouvrement ouvert de  $B$ . Par compacité, on peut alors en extraire  $(W_{b_i})_{1 \leq i \leq n}$  un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire que l'on a l'égalité suivante :

$$(2) \quad B = \bigcup_{i=1}^n W_{b_i}.$$

On introduit  $V := \bigcap_{i=1}^n V_{b_i}$ , d'après (1), il s'agit d'un ouvert de  $A$  contenant  $a_0$ .

En particulier, on en déduit immédiatement que l'on a :

$$(3) \quad \{a_0\} \times B \subseteq V \times B.$$

Soit désormais  $(a, b) \in V \times B$ , d'après (2), il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $b \in W_{b_i}$ . Or, par construction de  $V$ , on a  $a \in V_{b_i}$  et on en déduit que  $(a, b) \in V_{b_i} \times W_{b_i}$ . Finalement, d'après (1), on a  $(a, b) \in U$ , ce qui implique alors que l'on ait :

$$(4) \quad V \times B \subseteq U.$$

D'où le résultat annoncé, d'après (3) et (4). ■

**Proposition D.4.** Soient  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: X \rightarrow Y$  deux applications continues, alors  $f$  et  $g$  sont homotopes si et seulement si  $f$  et  $g$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $C^0(X, Y)$ .

*Preuve.* On procède par double implication.

1. Supposons que  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  soit une homotopie de  $f$  à  $g$ , on introduit alors l'application  $\gamma: [0, 1] \rightarrow C^0(X, Y)$  définie par :

$$\gamma(t) := H(\cdot, t).$$

Tout d'abord, vérifions que  $\gamma$  est effectivement à valeurs dans  $C^0(X, Y)$ . Soient  $t \in [0, 1]$ ,  $U$  un ouvert de  $Y$  et  $x \in \gamma(t)^{-1}(U)$ , alors, il vient :

$$(x, t) \in H^{-1}(U).$$

Or, l'application  $H$  étant continue,  $H^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X \times [0, 1]$ . Dès lors, par définition de la topologie produit, il existe  $V$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  et  $I$  un voisinage ouvert de  $t$  dans  $[0, 1]$  tels que :

$$(x, t) \in V \times I \subseteq H^{-1}(U).$$

En particulier, cela signifie que l'on a :

$$x \in V \subseteq \gamma(t)^{-1}(U).$$

Finalement, on a montré que  $\gamma(t)^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$  et  $\gamma(t) \in C^0(X, Y)$ . Pour conclure, il s'agit désormais d'établir la continuité de l'application  $\gamma$ . Par construction de la topologie compacte-ouverte, il suffit de voir que pour tous  $K$  compact de  $X$  et  $U$  ouvert de  $Y$ ,  $\gamma^{-1}(V(K, U))$  est ouvert dans  $[0, 1]$ . Soit  $t \in \gamma^{-1}(V(K, U))$ , on constate que l'on a :

$$K \times \{t\} \subseteq H^{-1}(U).$$

Or, l'application  $H$  étant continue,  $H^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X \times [0, 1]$ . Par conséquent, comme  $K$  est compact, d'après le lemme D.3, il existe  $I$  un ouvert de l'intervalle  $[0, 1]$  tel que :

$$K \times \{t\} \subseteq K \times I \subseteq H^{-1}(U).$$

En particulier cela signifie que l'on a :

$$t \in I \subseteq \gamma^{-1}(V(K, U)).$$

On en déduit que  $\gamma^{-1}(V(K, U))$  est ouvert dans  $[0, 1]$  et  $\gamma$  est continue. Finalement,  $\gamma$  est un chemin de  $f$  et  $g$  dans  $C^0(X, Y)$ .

2. Supposons que  $\gamma: [0, 1] \rightarrow C^0(X, Y)$  soit un chemin de  $f$  à  $g$ , on introduit alors l'application  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  définie par :

$$H(x, t) = \gamma(t)(x).$$

On introduit l'application d'évaluation sur  $C^0(X, Y)$ , il s'agit de :

$$\text{ev}: \begin{cases} X \times C^0(X, Y) & \rightarrow & Y \\ (x, f) & \mapsto & f(x) \end{cases} .$$

On constate alors que l'on a :

$$H = \text{ev} \circ (\text{id}_X, \gamma).$$

Ainsi,  $\gamma$  est continue, l'application  $(\text{id}_X, \gamma)$  est également continue. En particulier, pour établir la continuité de  $H$ , il suffit d'établir celle de  $\text{ev}$ . Soient  $U$  un ouvert de  $Y$  et  $(x, f) \in \text{ev}^{-1}(U)$ , on constate alors que  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$  contenant  $x$  et par locale compacité de  $X$ , il existe  $W$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  d'adhérence compacte dans  $X$  satisfaisant :

$$x \in W \subseteq f^{-1}(U).$$

On introduit alors  $V$  l'ouvert de  $X \times C^0(X, Y)$  définie par :

$$V := W \times V(\overline{W}, U).$$

Par définition de l'application  $\text{ev}$  et par construction de  $V$ , il vient :

$$(x, f) \in V \subseteq \text{ev}^{-1}(U).$$

On en déduit que  $\text{ev}^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X \times C^0(X, Y)$  et  $\text{ev}$  est continue. Finalement,  $H$  est une homotopie de  $f$  à  $g$ .

D'où le résultat annoncé. ■

## D.2. Ensembles d'homotopie, applications induites et revêtements.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques totalement quelconques.

**Définition D.5.** Soit  $x \in X$ , on note  $[x]_0$  la composante connexe par arcs de  $x$  dans  $X$  et  $\pi_0(X)$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ .

**Remarque D.6.** D'après la proposition D.4,  $\pi_0(X)$  s'identifie avec les classes d'équivalence de  $C^0(\{0\}, X)$  pour la relation d'homotopie.

**Lemme D.7.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue et  $(x, y) \in X^2$ . Si  $x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $X$ , alors  $f(x)$  et  $f(y)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $Y$ .

*Preuve.* Soit  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  soit un chemin de  $x$  à  $y$ , alors  $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow Y$  est un chemin de  $f(x)$  à  $f(y)$ , c'est-à-dire que  $f(x)$  et  $f(y)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $Y$ . D'où le résultat annoncé. ■

**Définition D.8.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue, alors l'*application induite* par  $f$  sur les  $\pi_0$  est l'application  $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  définie par :

$$f_*([x]_0) = [f(x)]_0.$$

Le lemme D.7 assure la bonne définition de cette application.

**Définition D.9.** Si l'on désigne par  $\mathbb{S}^1$  le quotient  $[0, 1]/\partial[0, 1]$ , alors l'*espace des lacets* de  $X$  est  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$  muni de la topologie de la convergence uniforme.

**Définition D.10.** Si  $X$  est connexe par arcs, on désigne par  $\pi_1^*(X)$  l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'espace des lacets de  $X$ .

**Remarque D.11.** D'après la proposition D.4,  $\pi_1^*(X)$  s'identifie au quotient de l'espace  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$  pour la relation d'homotopie.

Si  $x$  est un point de  $X$ , on note  $\pi_1(X, x)$  le *groupe fondamental* de  $X$  basé en  $x$ . On se contentera de décrire ses éléments comme les classes d'homotopie des lacets de  $X$  basé en  $x$  sans imposer aux homotopies d'être à extrémités fixées. On consultera [5] pour une exposition détaillée du groupe fondamental.

**Proposition D.12.** Si  $X$  est connexe par arcs et  $x$  est un point de  $X$ , alors l'inclusion naturelle  $\iota: \pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi_1^*(X)$  est surjective.

*Preuve.* Soit  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  continue, il s'agit de montrer que  $f$  est homotope à un lacet de  $X$  basé en  $x$ . Or, comme  $X$  est connexe par arcs, il existe une application continue  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  telle que l'on ait  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = f(0)$ . Dès lors, on introduit l'application continue  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par :

$$g(x) := \begin{cases} \gamma(3x) & x \in [0, 1/3] \\ f(3x - 1) & x \in [1/3, 2/3] \\ \gamma(3 - 3x) & x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

On vérifie que  $g$  d'un lacet de  $X$  basé en  $x$ ; en effet, on a  $g(0) = x = g(1)$ . Pour se donner une idée de ce que représente  $g$ , on verra les figures 26 et 28. Il s'agit tout d'abord de parcourir  $\gamma$ , puis  $f$  et enfin de suivre  $\gamma$  à contresens.

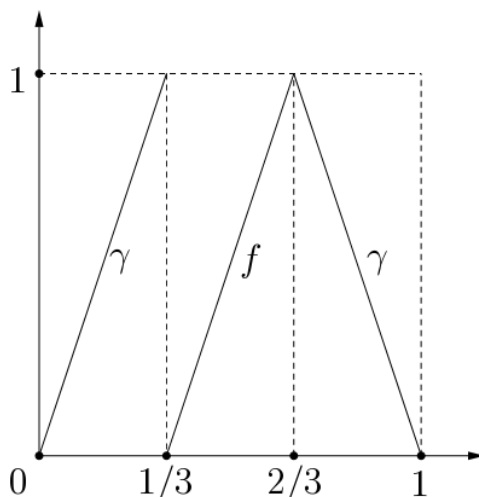


FIGURE 26. Diagramme de concaténation pour  $g$ .

Pour conclure, il suffit de voir que  $f$  est homotope à  $g$ , ce que l'on va montrer en rétractant continument le lacet  $\gamma$  sur le point  $f(0)$  de  $X$ , voir la figure 27. Rigoureusement, on introduit l'application  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  définie par :

$$H(x, t) := \begin{cases} \gamma(3x + 1 - t) & x \in [0, t/3] \\ f\left(\frac{3x - t}{3 - 2t}\right) & x \in [t/3, 1 - t/3] \\ \gamma(4 - t - 3x) & x \in [1 - t/3, 1]. \end{cases}$$

Pour se donner une idée de ce que représente  $H$ , on verra les figures 27 et 28. Au temps  $t \in [0, 1]$ , il s'agit tout d'abord de parcourir  $\gamma$  à partir du point  $\gamma(1 - t)$ , puis  $f$  et enfin de suivre  $\gamma$  à contresens jusqu'au point  $\gamma(1 - t)$ .



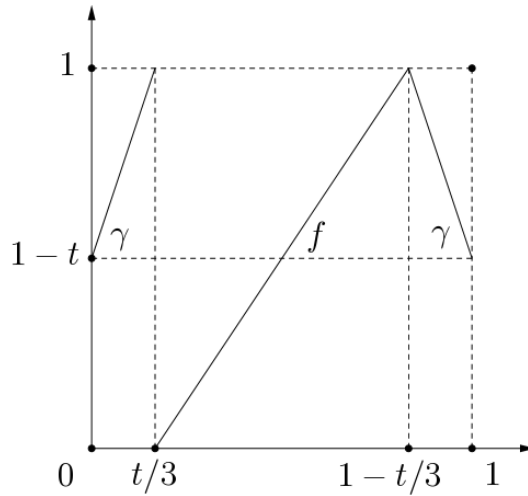


FIGURE 27. Diagramme de concaténation pour  $H(\cdot, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Tout d'abord,  $H$  est correctement définie puisque pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$H(0, t) = \gamma(1 - t) = H(1, t).$$

On vérifie également que  $H$  est continue et telle que  $H(\cdot, 0) = f$ ,  $H(\cdot, 1) = g$ .

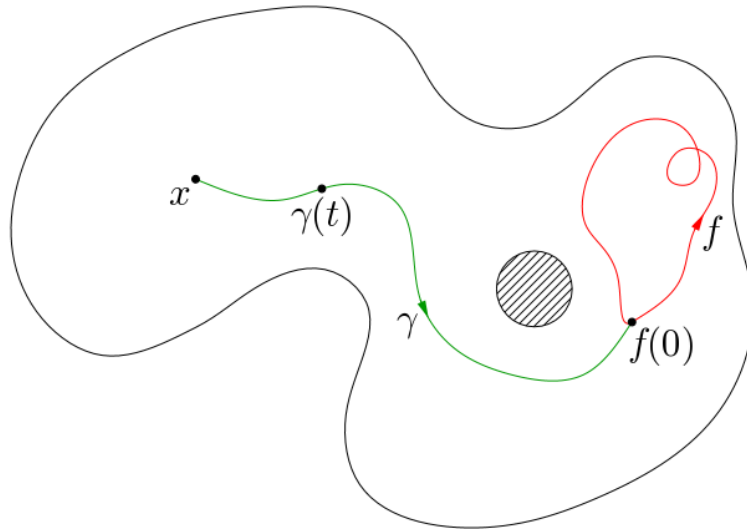


FIGURE 28. Un lacet de  $X$  est homotope à un lacet de  $X$  basé en  $x$ .

D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque D.13.** Si l'on se proposait pour décrire plus précisément  $\pi_1(X, x)$ , on compléterait la preuve de la proposition D.12 en montrant que  $\iota$  induit une correspondance bijective entre les classes de conjugaison de  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1^*(X)$ . En particulier, si  $\pi_1(X, x)$  est abélien, alors il est en bijection avec  $\pi_1^*(X)$ .

**Définition D.14.** Soient  $T$  et  $B$  deux espaces topologiques, alors une application continue  $\pi: T \rightarrow B$  est un *revêtement* de base  $B$  et d'espace total  $T$  si et seulement si pour tout point  $b \in B$ , il existe  $V_b$  un voisinage ouvert de  $b$  dans  $B$  et  $\{U_{b,i}\}_{i \in I}$  une collection d'ouverts disjoints de  $T$  tels que :

$$\pi^{-1}(V_b) = \bigcup_{i \in I} U_{b,i}$$

et que pour tout  $i \in I$ ,  $\pi|_{U_{b,i}}: U_{b,i} \rightarrow V_b$  soit un homéomorphisme.

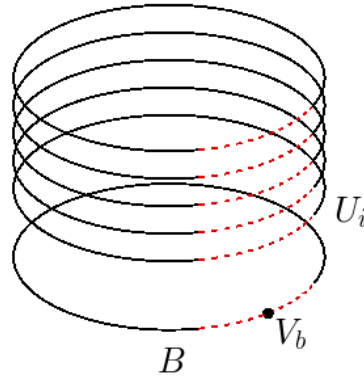


FIGURE 29. Schématisation d'un revêtement.

**Exemple D.15.** L'application  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par la formule :

$$p(x) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

est un revêtement de  $\mathbb{S}^1$  par  $\mathbb{R}$ , voir la figure 30.

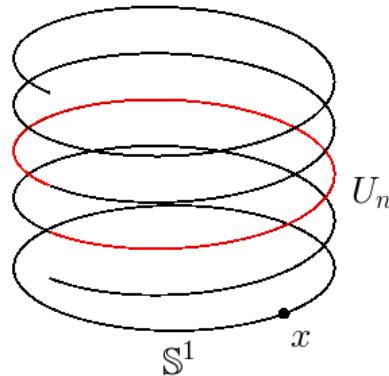


FIGURE 30. Le revêtement du cercle par la droite.

En effet, pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ , alors il existe  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $x = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta))$ . Soit alors  $V_x$  le voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbb{S}^1$  défini par :

$$V_x := \left\{ (\cos(2\pi(\theta + t)), \sin(2\pi(\theta + t))); t \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ \right\}.$$

Désormais, pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on introduit  $U_{x,n}$  l'ouvert de  $\mathbb{R}$  défini par :

$$U_{x,n} := \left] \theta - \frac{1}{2} + n, \theta + \frac{1}{2} + n \right[.$$

On constate que  $\{U_{x,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une collection d'ensemble disjoints telle que :

$$p^{-1}(V_x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_{x,n}.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $p|_{U_{x,n}} : U_{x,n} \rightarrow V_x$  est un homéomorphisme.

### D.3. Degré d'une application continue du cercle dans le cercle.

On note  $\mathbb{S}^1$  le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  muni de sa norme euclidienne standard  $\|\cdot\|$ . On identifiera indifféremment  $\mathbb{S}^1$  avec le quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . De plus, l'application  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  désignera systématiquement le revêtement de l'exemple D.15.

**Définition D.16.** Soient  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  continues, alors  $\theta$  est un *relèvement* de  $f$  si et seulement si elle fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \\ f \uparrow & \nearrow \theta & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

En d'autres termes,  $\theta$  est un relèvement de  $f$  si et seulement si  $f = p \circ \theta$ .

**Remarque D.17.** Un relèvement d'une application continue de  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  correspond à une mesure continue de son angle.

On consultera [5] pour une preuve de cette technique mais non moins classique :

**Théorème D.18.** Soit  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continue, alors  $f$  admet un relèvement.

**Remarque D.19.** La preuve consiste essentiellement à exploiter le fait que  $p: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est un revêtement et admet à ce titre des sections locales.

**Proposition D.20.** Soient  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue et  $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de  $f$ , alors  $\theta(1) - \theta(0)$  est un entier relatif indépendant de  $\theta$ .

*Preuve.* On montre les deux propriétés indépendamment.

1. On remarque que  $f(0) = f(1)$ , dès lors  $\theta(1) - \theta(0) \in \mathbb{Z}$ .
2. Soit  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un autre relèvement de  $f$ , alors  $\theta - \phi$  est une application continue à valeur dans  $\mathbb{Z}$  et il existe donc  $a \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\theta = \phi + a.$$

Finalement, on a  $\theta(1) - \theta(0) = \phi(1) - \phi(0)$ .

D'où le résultat annoncé. ■

**Définition D.21.** Soit  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue, on appelle *degré* de l'application  $f$  et l'on note  $\deg(f)$  l'entier relatif donné par  $\theta(1) - \theta(0)$ , où  $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un relèvement quelconque de  $f$ .

**Remarque D.22.** Le degré d'une application continue  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  correspond à la variation globale d'une mesure continue de son angle. Géométriquement, il s'interprète comme le nombre de tours complets réalisés par  $f$ .

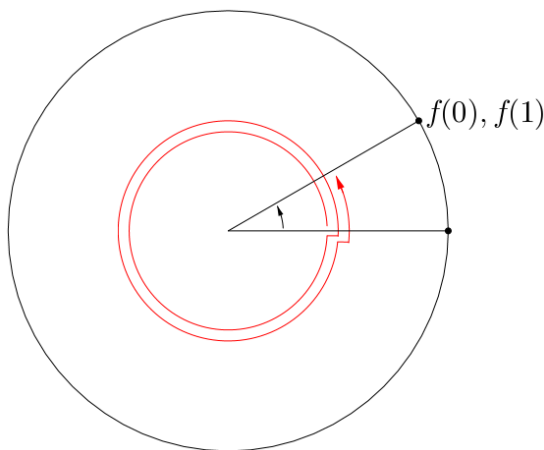


FIGURE 31. Interprétation géométrique du degré d'une application continue  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

**Lemme D.23.** Soient  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  deux applications continues. Si  $f$  et  $g$  ne sont jamais antipodales, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ , on a :

$$\|f(x) - f(y)\| < 2,$$

alors  $f$  et  $g$  ont le même degré.

*Preuve.* Soit  $\theta_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , respectivement  $\theta_g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , un relèvement de  $f$ , respectivement un relèvement de  $g$ , alors par hypothèse, on a :

$$\theta_f(0) - \theta_g(0) \not\equiv \frac{1}{2} \pmod{[1]}.$$

Dans le cas contraire, on aurait alors :

$$\|f(0) - g(0)\| = 2\|f(0)\| = 2,$$

ce qui n'est pas. Dès lors, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que l'on ait :

$$(5) \quad |\theta_f(0) - \theta_g(0) - k| < \frac{1}{2}.$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$(6) \quad |\theta_f(1) - \theta_g(1) - k| < \frac{1}{2}.$$

Si ce n'était pas le cas, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue  $|\theta_f - \theta_g - k| - 1/2$  assurerait l'existence de  $x \in \mathbb{R}$  tel que :

$$|\theta_f(x) - \theta_g(x)| = \frac{1}{2}.$$

En particulier, on aurait alors :

$$\|f(x) - g(x)\| = 2\|f(x)\| = 2,$$

ce qui n'est pas. Enfin, d'après les inégalités (5) et (6), il vient :

$$|\deg(f) - \deg(g)| \leq |\theta_f(1) - \theta_g(1) - k| + |\theta_g(0) - \theta_f(0) + k| < 1.$$

Finalement,  $\deg(f)$  et  $\deg(g)$  étant entiers, on a le résultat annoncé. ■

**Corollaire D.24.** Soient  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  des applications continues. Si  $f$  et  $g$  sont homotopes, alors  $f$  et  $g$  ont le même degré.

*Preuve.* Soit  $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  une homotopie de  $f$  à  $g$ , alors comme  $[0, 1]$  est compact, l'application donnée par  $t \mapsto H(\cdot, t)$  est uniformément continue. En particulier, il existe  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2, |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|H(x, t_1) - H(x, t_2)\| < 2.$$

Dès lors, pour  $n \geq \max(1, 1/\delta)$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left\| H\left(x, \frac{j}{n}\right) - H\left(x, \frac{j+1}{n}\right) \right\| < 2.$$

Finalement, d'après le lemme D.23, il vient :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \deg\left(H\left(\cdot, \frac{j}{n}\right)\right) = \deg\left(H\left(\cdot, \frac{j+1}{n}\right)\right).$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$\deg(H(\cdot, 0)) = \deg(H(\cdot, 1)).$$

D'où le résultat annoncé, puisque  $H(\cdot, 0) = f$  et  $H(\cdot, 1) = g$ . ■

**Théorème D.25.** Le degré induit une bijection bien définie de  $\pi_1^*(\mathbb{S}^1)$  sur  $\mathbb{Z}$ .

*Preuve.* On montre indépendamment chacune des propriétés.

1. Soient  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  des applications continues et homotopes, alors d'après le corollaire D.24,  $f$  et  $g$  ont même degré, c'est-à-dire que le degré ne dépend pas de la classe d'homotopie dans  $C^0(\mathbb{S}^1, X)$ . Finalement,  $\deg: C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$  passe au quotient pour la relation être homotope.
2. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit l'application continue  $f_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  par la formule :

$$f_n(x) := (\cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx)).$$

On constate que l'application  $\theta_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $\theta_n(x) := nx$  est un relevé de  $f_n$ , ainsi  $\deg(f_n) = n$  et  $\deg: C^0(\mathbb{S}^1, X) \rightarrow \mathbb{Z}$  est surjective.

3. Soient  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continues et de même degré, il s'agit de faire voir que  $f$  et  $g$  sont homotopes. Soient  $\theta_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , respectivement  $\theta_g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , un relevé de  $f$ , respectivement de  $g$ . Afin de se ramener au cas où l'on a  $f(0) = g(0)$ , on introduit l'angle suivant :

$$\phi := \theta_f(0) - \theta_g(0).$$

On introduit alors l'application continue  $\bar{g}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par :

$$\bar{g}(x) = p(\theta_g(x) + \phi).$$

On remarque que  $g$  et  $\bar{g}$  sont homotopes, ce qui peut être accompli par :

$$G: \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, t) & \mapsto p(\theta_g(x) + t\phi) \end{cases} .$$

Il suffit alors de montrer que  $f$  et  $\bar{g}$  sont homotopes. Soit alors  $\theta_{\bar{g}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relevé de  $\bar{g}$ , comme  $f(0) = \bar{g}(0)$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$(7) \quad \theta_{\bar{g}}(0) = \theta_f(0) + k.$$

Or,  $g$  et  $\bar{g}$  étant homotopes, d'après le corollaire D.24, elles ont même degré. Ainsi, par hypothèse,  $f$  et  $\bar{g}$  ont même degré, c'est-à-dire que l'on a :

$$\theta_{\bar{g}}(1) - \theta_{\bar{g}}(0) = \theta_f(1) - \theta_f(0).$$

Dès lors, d'après (7), il vient :

$$(8) \quad \theta_{\bar{g}}(1) = \theta_f(1) + k.$$

Désormais, on définit l'application  $H: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^1$  par la formule :

$$H(x, t) = p((1 - t)\theta_f(x) + t\theta_{\bar{g}}(x)).$$

Il s'agit d'une homotopie bien définie de  $f$  à  $\bar{g}$ ; en effet d'après (7) et (8) :

$$\forall t \in [0, 1], H(0, t) = H(1, t).$$

Finalement, l'application induite par le degré sur  $\pi_1^*(\mathbb{S}^1)$  est injective.

D'où le résultat annoncé. ■

**Remarque D.26.** Comme le groupe fondamental de  $\mathbb{S}^1$  basé en n'importe lequel de ses points est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , voir [5], le résultat du théorème D.25 est en accord avec l'affirmation de la remarque D.13.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Adachi. *Embeddings and Immersions*. American Mathematical Society, 1993.
- [2] C. Adams. *The Knot Book : An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 2004.
- [3] M. Berger ; B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Broché, 2013.
- [4] Y. Eliashberg ; N. Mishachev. *Introduction to the h-principle*. American Mathematical Society, 2002.
- [5] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, 1971.
- [6] H. Geiges. *h-principles and Flexibility in Geometry*. Memoirs of the American Mathematical Society, 2003.
- [7] V. Guillemin ; A. Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [8] M. Hirsch. *Differential topology*. Springer, 1976.
- [9] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.
- [10] J. Milnor. *Topology from the differentiable view point*. Princeton Landmarks, 1965.
- [11] E. H. Moore. On certain crinkly curves. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1 :72–90, 1900.
- [12] J. Munkres. *Topology*. Pearson, 2000.
- [13] H. Whitney. Differentiable manifolds. *The Annals of Mathematics*, 3 :645–680, 1936.
- [14] H. Whitney. On regular closed curves in the plane. *Compositio Mathematica*, 4 :276–284, 1937.