

TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE ET MATHÉMATIQUES D'AUJOURD'HUI

CYRIL FALCON

RÉSUMÉ. Dans ce rapport, nous revenons sur l'exposé de Sylvain Courte de l'Université Grenoble Alpes donné lors de la conférence en l'honneur de Jean Cerf au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay du 11 au 13 juin 2018. Ce travail constitue le cours supplémentaire de l'auteur pour sa troisième année de magistère de mathématiques à l'Université Paris-Sud.

INTRODUCTION

En 1956, John Milnor a exhibé dans son article novateur [12], les premiers exemples de variétés différentielles homéomorphes, mais non difféomorphes, à la sphère euclidienne standard de dimension sept. Ce résultat ouvrait alors la chasse aux *sphères exotiques*, à savoir aux structures différentielles sur les sphères qui ne sont pas équivalentes à la structure euclidienne standard.

Les topologues du monde entier se sont alors rapidement efforcés de déterminer toutes les structures différentielles non équivalentes de la sphère, ce problème se révèle être d'une richesse inouïe. Mentionnons qu'à ce jour, nous ignorons toujours s'il existe des structures exotiques sur la sphère de dimension quatre. Les sphères de dimension au plus trois sont dépourvues de structures exotiques, ce qui se montre facilement en dimension un et deux et pour la dimension trois, c'est, par exemple, une conséquence de la conjecture (théorème) de Poincaré.

Présentons l'une des stratégies utilisée pour construire des sphères exotiques. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considérons $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation et notons S_f la variété obtenue par recollement de deux copies du n -disque standard le long de leurs bords selon l'identification donnée par f :

$$S_f = D^n \cup_f D^n.$$

D'après John Milnor dans [13], S_f est homéomorphe à la n -sphère standard, mais ne lui est pas nécessairement difféomorphe, il s'agit d'une *sphère tordue*. Notons qu'une variété compacte sans bord munie d'une fonction de Morse ayant exactement deux points critiques est un exemple de sphère tordue.

Les sphères tordues revêtent une importance cruciale dans le problème de classification des structures différentielles de la sphère, puisque des travaux de Stephen Smale, comme son article [16] de 1961, établissent qu'en dimension au moins cinq, toute sphère exotique est difféomorphe à une sphère tordue.

Dès lors, nous concentrons désormais notre attention sur le problème de classification de toutes les structures tordues non équivalentes de la sphère. Nous équipons l'ensemble des classes de difféomorphismes de n -sphères tordues de la somme connexe, de sorte à obtenir un groupe abélien Γ_n et la suite exacte :

$$\pi_0 \text{Diff}^+(D^n) \rightarrow \pi_0 \text{Diff}^+(S^{n-1}) \rightarrow \Gamma_n \rightarrow 0.$$

Nous devons à Jean Cerf le résultat révolutionnaire suivant :

Théorème (J. Cerf, 1968, [3]). Le groupe des difféomorphismes qui préservent l'orientation de S^3 est connexe par arcs.

Nous en déduisons immédiatement $\Gamma_4 = 0$, ce qui a rendu célèbre Jean Cerf. Cette égalité est d'une importance capitale dans le problème d'existence de structures exotiques sur la sphère de dimension quatre puisqu'il anéantit tout espoir de les construire comme structures tordues.

Concluons sur les sphères exotiques, en évoquant enfin un autre théorème de Jean Cerf permettant cette fois-ci le calcul de Γ_n en grande dimension.

Définition. Soit M une variété différentielle, une *pseudo-isotopie* de M est un difféomorphisme ψ de $M \times [0, 1]$ fixant ponctuellement $(M \times \{0\}) \cup (\partial M \times [0, 1])$. Nous disons que le difféomorphisme $\psi(\cdot, 1)$ de M est *pseudo-isotope à l'identité*.

Dans ce contexte, Jean Cerf a démontré le résultat suivant :

Théorème (J. Cerf, 1970, [4]). Soit M une variété simplement connexe de dimension au moins cinq, alors un difféomorphisme de M est isotope à l'identité si, et seulement s'il est pseudo-isotope à l'identité.

Nous en déduisons que pour un entier $n \geq 6$, le groupe $\pi_0 \text{Diff}^+(D^n)$ est trivial, de sorte que le groupe Γ_n est isomorphe à $\pi_0 \text{Diff}^+(S^{n-1})$.

Jean Cerf a véritablement joué un rôle considérable dans le développement de la topologie différentielle en France et j'espère que les résultats brièvement discutés ci-dessus laisseront apercevoir l'impact majeur de ses travaux.

À l'occasion des quatre-vingt-dix ans de Jean Cerf, une conférence nommée *Topologie différentielle et mathématiques d'aujourd'hui* s'est déroulée en son honneur du 11 au 13 juin 2018 au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, des informations complémentaires sont disponibles sur la page suivante :

<https://www.math.u-psud.fr/Cerf90>

Il s'agissait aussi pour le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay de témoigner sa reconnaissance à Jean Cerf pour la création de son équipe de Topologie.

Je tenais vivement à assister à cette conférence, car les méthodes développées¹ par Jean Cerf pour établir ses théorèmes ici évoqués constituent un aspect essentiel de mon doctorat² que je débute en octobre 2018.

1. Il s'agit d'une théorie de Morse à paramètres.

2. Mon projet doctoral s'intitule *Sur les propriétés des invariants homologiques par familles génératrices des sous-variétés legendriennes* et il est dirigé par Frédéric Bourgeois.

Dans ce rapport de conférence, nous souhaitons revenir en plus grands détails sur la présentation *Les sous-variétés legendriennes et les fonctions génératrices* de Sylvain Courte, maître de conférences à l'Université Grenoble Alpes. La volonté d'articuler notre compte-rendu autour de cet exposé provient de l'inscription directe des résultats dans la lignée des travaux de Jean Cerf, mais aussi de leur proximité et de leurs riches interactions avec mon doctorat. La philosophie commune consiste à proposer une approche par la théorie de Morse–Cerf à la géométrie symplectique et de contact.

Le présent document s'organise en deux parties, il s'agit d'abord d'effectuer les rappels de géométrie symplectique et de contact nécessaires pour ensuite présenter convenablement les résultats exposés par Sylvain Courte.

1. DE LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET DE CONTACT ÉLÉMENTAIRES

Considérons une voiture roulant sans glisser sur un revêtement supposé plat, alors son vecteur vitesse est constamment dirigé dans la direction de ses roues³. Réperons la position de la voiture à l'aide de coordonnées $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, où (x, y) situent son centre de masse et θ désigne l'angle de rotation des roues. L'observation faite dans notre première phrase se formule alors comme suit :

$$\dot{x} \sin(\theta) = \dot{y} \cos(\theta),$$

ou encore en disant que la trajectoire de la voiture est partout tangente à la distribution de plans de l'espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times S^1$ donné par :

$$\xi := \ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy).$$

Ce que nous venons de décrire correspond à une manifestation physique des notions de structure de contact et des sous-variétés legendriennes associées⁴. Il va désormais s'agir d'extraire et de formaliser l'essence de cette situation.

L'objectif n'est pas ici de faire un cours introductif à la géométrie de contact, ni même d'en discuter la pertinence, mais seulement d'en survoler les notions centrales qui seront nécessaires à la bonne compréhension de la suite du texte. L'ouvrage de référence pour cette partie est le livre [9] de Hansjörg Geiges.

Soit M une variété différentielle de dimension impaire $2n + 1$.

Définition. Une *forme de contact* sur M est une forme différentielle α sur M de degré 1 satisfaisant la condition de non dégénérescence $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Remarque. La forme bilinéaire alternée $d\alpha$ est non dégénérée sur $\ker(\alpha)$, ce qui impose aux hyperplans $\ker(\alpha)$ de TM d'être de dimension paire.

Exemple. La forme $\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy$ est de contact sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

3. Il s'agit d'une contrainte, la voiture ne peut pas réaliser toutes les trajectoires planes. Pourtant, nous pouvons toujours nous déplacer librement en voiture selon notre bon vouloir, il s'agit, par exemple, du théorème d'approximation legendrienne, voir [9].

4. Il s'agit aussi d'un cadre adapté à la formulation du principe d'Huyghens de l'optique géométrique et du premier principe de la thermodynamique.

Définition. Une *structure de contact* est un champ d'hyperplans ξ tangents à la variété M donné par le noyau d'une forme de contact.

Remarque. Les structures de contact et les feuilletages sont en contraste. Cette définition est à rapprocher d'un théorème de Frobenius selon lequel le champ d'hyperplans donné par le noyau de α est tangent à un feuilletage de codimension un si, et seulement, si $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Les structures de contact minimisent la dimension des sous-variétés qui sont partout tangentes à un champ d'hyperplans tangents.

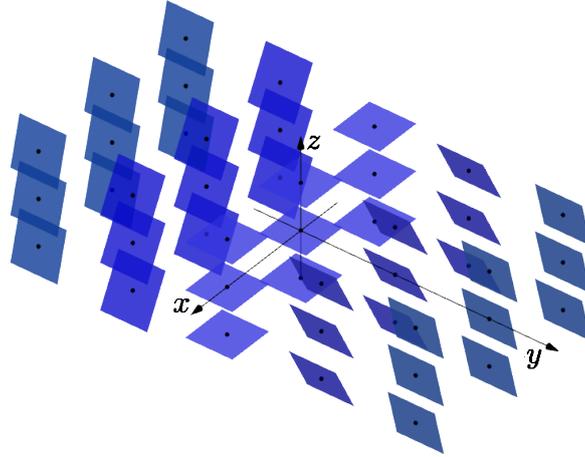


FIGURE 1. La structure de contact $\xi := \ker(dz - ydx)$ de \mathbb{R}^3 .

La variété M est désormais munie d'une structure de contact notée ξ .

Définition. Une sous-variété Λ de M de dimension n est *legendrienne* dès qu'elle satisfait la condition de tangence $T\Lambda \subset \xi$.

Les legendriennes sont les sous-variétés partout tangentes à une structure de contact de dimension maximale.

Exemple. Les trajectoires de nos voitures sont des sous-variétés legendriennes de $\mathbb{R}^2 \times S^1$ munie de la structure de contact $\ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy)$.

Nous fermons ce court volet de topologie de contact en précisant la notion de déformation d'une sous-variété legendrienne.

Définition. Un chemin $(\psi_t: L \hookrightarrow M)_{t \in I}$ de plongements, où L est une variété, est une *isotopie legendrienne* lorsque pour tout $t \in I$, nous avons $T\psi_t(L) \subset \xi$.

Discutons succinctement de l'analogie en dimension paire des variétés de contact et des legendriennes : les variétés symplectiques⁵ et les lagrangiennes. Les interactions entre les mondes symplectique et de contact sont nombreuses, mais ici, nous ne les effleurons qu'à peine, il s'agira pour nous seulement d'un détour adapté à la formulation de certains résultats.

5. Les variétés symplectiques trouvent également leurs origines en sciences physiques, puisqu'elles apparaissent comme espaces des phases de la mécanique classique.

Soit W une variété différentielle de dimension paire $2n$.

Définition. Une *forme symplectique* sur W est une 2-forme ω sur W qui satisfait les conditions d'intégrabilité $d\omega = 0$ et de non dégénérescence $\omega^n \neq 0$.

Exemple. La forme $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ est symplectique sur \mathbb{R}^{2n} .

La variété W est désormais munie d'une forme symplectique notée ω .

Définition. Une sous-variété L de W de dimension n est *lagrangienne* dès que la condition $\omega|_L = 0$ est satisfaite.

Remarque. Par functorialité de la dérivée extérieure, la forme $\omega|_L$ est fermée.

De plus, lorsque $\omega = d\alpha$, nous disposons également la notion suivante⁶.

Définition. Une sous-variété lagrangienne L est *exacte* lorsque $\alpha|_L$ l'est.

Donnons enfin une notion stricte de déformation d'une variété symplectique.

Définition. Un champ de vecteurs X est *hamiltonien* lorsque $\iota_X\omega$ est exacte⁷.

Définition. Une isotopie $(\psi_t)_{t \in I}$ de W est *hamiltonienne* lorsque son générateur infinitésimal $\partial_t\psi_t$ est un champ de vecteurs hamiltonien.

Nous concluons cette discussion en rappelant que les variétés symplectiques, respectivement les variétés de contact, sont toutes localement identiques, elles sont «façonnées» sur le même modèle standard⁸ (théorème de Darboux). Retenons en qu'en géométrie symplectique et de contact, seuls les phénomènes semi-locaux ou globaux sont dignes d'intérêt, ils sont les seuls susceptibles de restituer une information non triviale sur la géométrie de ces variétés.

2. LES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES ET LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Dans cette partie, nous présentons le contenu de l'exposé de Sylvain Courte. Nous en consacrons les deux premières sections à la construction motivée des objets qui constituent le cœur de sa présentation, pour enfin discuter dans la troisième et dernière section du résultat central énoncé par Sylvain Courte. Je m'autorise parfois des digressions pour préciser brièvement les interactions de ces travaux avec mon doctorat.

2.1. Les variétés symplectique et de contact tautologiques.

Dans cette section, nous construisons les variétés symplectiques et de contact évoquées dans la partie précédente, ce sont celles qui modèlent toutes les autres. Les résultats sont ici énoncés sans faire mention des preuves, mais il ne s'agit jamais plus d'une simple observation ou d'un calcul direct.

Soient X une variété et $\pi: T^*X \rightarrow X$ son fibré cotangent.

6. Le cas échéant, nous disons que (W, ω) est une variété symplectique exacte.

7. Nous pourrions relâcher cette condition en demandant seulement que $i_X\omega$ soit fermée, ce qui d'après la formule de Cartan serait équivalent à ce que le flot de X préserve ω .

8. Ce résultat est à mettre en contraste avec le cas des variétés riemanniennes qui possèdent des invariants locaux, comme leur courbure.

Définition. La *forme de Liouville* λ de T^*X est la 1-forme sur T^*X telle que :

$$\lambda_p(v) = p(T_p\pi(v)),$$

où p est un élément de T^*X et v est un élément de T_pT^*X .

Exemple. La forme de Liouville de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i dy_i,$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de la base et (y_1, \dots, y_n) celles de la fibre.

En plus d'être *canonique*, la forme de Liouville satisfait au résultat suivant :

Proposition. Pour toute 1-forme différentielle α de X , nous avons

$$\alpha^* \lambda = \alpha.$$

De plus, la forme de Liouville est caractérisée par cette propriété.

La forme de Liouville constitue l'ingrédient clef de la construction des variétés symplectique et de contact standards.

Proposition. La forme différentielle $d\lambda$ est symplectique sur T^*X .

L'espace des premiers jets de X , noté J^1X est la variété $T^*M \times \mathbb{R}$.

Proposition. La forme différentielle $dz - \lambda$ est de contact sur J^1X .

La variété J^1X est la *contactisation* de la variété symplectique exacte T^*X .

Proposition. Pour toute fonction lisse $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, les applications notées $i_f: M \rightarrow T^*M$ et $j_f: X \rightarrow J^1X$ définies par :

$$i_f(x) = (x, T_x f), \quad j_f(x) = ((x, T_x f), f(x))$$

sont respectivement des plongements lagrangien exact et legendrien.

Remarque. En vertu des théorèmes de Darboux, nous venons de construire une abondance remarquable de sous-variétés lagrangiennes et legendriennes dans des variétés symplectiques et de contact quelconques.

Nous introduisons les applications $\pi_{xz}: J^1X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ et $\pi_{xy}: J^1X \rightarrow T^*X$,

$$\begin{aligned} \pi_{xz}(x, y, z) &= (x, z), \\ \pi_{xy}(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$

où $(x, y, z) \in X \times T_x^*X \times \mathbb{R}$, il s'agit des projections *frontale* et *lagrangienne*.

Proposition. Soit Λ une sous-variété legendrienne de J^1X , alors :

1. Le *diagramme lagrangien* $\pi_{xy}(\Lambda)$ de Λ est une sous-variété lagrangienne immergée de T^*X qui détermine complètement Λ .
2. Le *front legendrien* $\pi_{xz}(\Lambda)$ de Λ détermine complètement Λ .

Nous utiliserons ces projections pour visualiser les sous-variétés legendriennes. Nous représenterons les projections frontales comme des graphiques ayant les coordonnées selon X comme abscisses et la coordonnée selon \mathbb{R} en ordonnée.

2.2. Les familles génératrices.

Dans la section précédente, nous avons observé que la différentielle et le 1-jet d'une fonction induisent des sous-variétés lagrangienne exacte et legendrienne. Il va sans dire que les sous-variétés lagrangiennes exactes et legendriennes ainsi obtenues forment une classe extrêmement restreinte, puisque le front d'une telle sous-variété legendrienne est toujours un graphe.

Nous généralisons cette construction en considérant la différentielle et le 1-jet dans la direction de X d'une fonction définie sur un fibré vectoriel de base X . Les fibres permettent intuitivement d'obtenir des points multiples au-dessus d'une même abscisse dans le front de la sous-variété legendrienne décrite.

Notons x les coordonnées de X et v les coordonnées de \mathbb{R}^N .

Définition. Une application lisse $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une *famille génératrice*⁹ lorsque $\mathbf{0}$ est une valeur régulière de $\partial_v f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$.

Exemple. Une fonction lisse de X dans \mathbb{R} est une famille génératrice.

Notons Σ_f la sous-variété critique $\partial_v f^{-1}(\mathbf{0})$ de dimension n dans $X \times \mathbb{R}^N$, introduisons les applications $i_f: \Sigma_f \rightarrow T^*X$ et $j_f: \Sigma_f \rightarrow J^1X$ définies par :

$$i_f(x, v) = (x, \partial_x f(x, v)), \quad j_f(x, v) = ((x, \partial_x f(x, v)), f(x, v)),$$

et désignons leurs images par L_f et Λ_f .

Proposition. Les applications i_f et j_f sont respectivement des immersions lagrangienne et legendrienne.

Remarque. Le front legendrien de Λ_f est constitué des points $(x, v) \in X \times \mathbb{R}^N$, où v est un point critique de $f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition. Une famille génératrice $f: X \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ engendre une sous-variété lagrangienne (resp. legendrienne) L de T^*X (resp. Λ de J^1X) lorsque

$$L = L_f \text{ (resp. } \Lambda = \Lambda_f \text{)}.$$

Nous disons que L (resp. Λ) *admet* une famille génératrice.

Remarque. Le cas échéant, les immersions i_f et j_f sont des plongements.

Une sous-variété legendrienne de J^1X admet une famille génératrice si, et seulement, si son front legendrien est un *diagramme de Cerf*¹⁰.

Exemple. L'application $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, v) = v^3 - 3t(1-t)v$ est une famille génératrice pour un nœud legendrien trivial, nous avons :

$$\Sigma_f = \left\{ \left(t, \sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ \left(t, -\sqrt{t(1-t)} \right); t \in [0, 1] \right\}$$

qui est composé de deux branches qui sont des graphes de fonctions.

9. Nous ne perdons pas de généralité à considérer seulement des fibrés vectoriels triviaux. Ils sont de toute façon amenés à être stabilisés (ajout de nouvelles dimensions dans la fibre), de sorte qu'ils finiraient quand même par devenir trivialisable.

10. Nous illustrons cette notion dans l'exemple suivant, voir [3] pour sa définition générale.

Nous représentons le front de ce nœud legendrien et sa famille génératrice f .

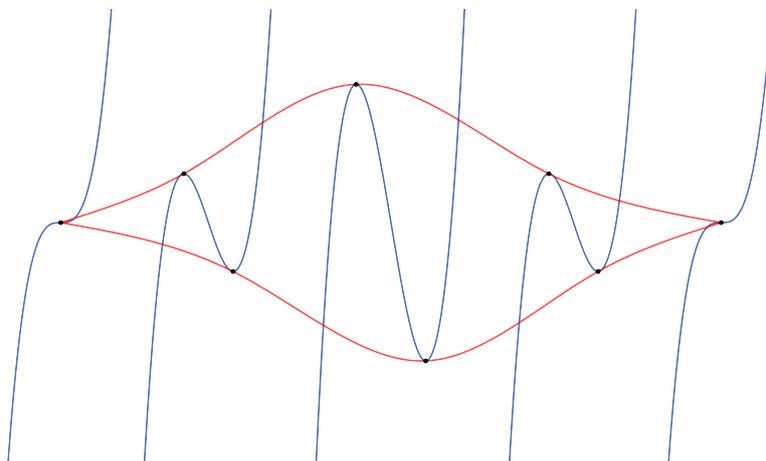


FIGURE 2. En rouge, le diagramme de Cerf de l'application f .

Dans toute la suite, nous nous concentrons plutôt sur les familles génératrices des sous-variétés legendriennes, faisons alors le parallèle entre les plongements lagrangiens exacts et les plongements legendriens.

Observons que $L \xhookrightarrow{i} T^*M$ est un plongement lagrangien exact avec $i^*\lambda = df$, où $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse si, et seulement, si l'application :

$$\begin{aligned} L &\hookrightarrow J^1M \\ x &\mapsto (i(x), f(x)) \end{aligned}$$

est un plongement legendrien, ce qui fournit le parallèle recherché.

Nous clôturons cette section en énonçant un théorème qui justifie à lui seul la pertinence des familles génératrices.

Théorème (Y. Chekanov, 1996, [5]). L'existence d'une famille génératrice persiste aux isotopies legendriennes.

2.3. Des obstructions à l'existence d'une famille génératrice.

Dans cette section, nous constatons que certaines sous-variétés legendriennes n'admettent pas de famille génératrice et nous dégageons des conditions topologiques, homotopiques (plus ou moins fines), nécessaires à leur existence. Nous discutons aussi de l'importance conjecturale de cette question.

Nous commençons par énoncer une conjecture de Vladimir Arnol'd suspectant un certain comportement global et rigide des plongements lagrangiens exacts. Dans toute la suite, M et L sont des variétés compactes sans bord.

Conjecture. Si $L \hookrightarrow T^*M$ est un plongement lagrangien exact, alors L est hamiltonniennement isotopique à la section nulle de T^*M .

Cette conjecture se révèle être d'une difficulté exceptionnelle, nous savons seulement qu'elle est vraie pour $M = S^1$, S^2 (2004, [11]) et T^2 (2016, [6]). Pour les dernières avancées générales, nous invitons à consulter l'article [1] de Mohammed Abouzaid et Thomas Kragh datant de 2016.

Heureusement, nous disposons du théorème suivant de Jean-Claude Sikorav :

Théorème (J.-C. Sikorav, 1987, [15]). Si L est hamiltonniennement isotopique à la section nulle de T^*M , alors L admet une famille génératrice.

Il nous permet de déduire une version affaiblie de la conjecture, que voici :

Conjecture. Si $L \hookrightarrow T^*M$ est un plongement lagrangien exact, alors L admet une famille génératrice.

Afin d'espérer un jour nous approcher de la résolution de ces conjectures, il est d'abord crucial et essentiel de dégager toutes les obstructions topologiques à l'existence d'une famille génératrice pour une sous-variété lagrangienne.

2.3.1. L'application de Gauss lagrangienne.

Nous notons $\Lambda(TT^*M)$ le fibré des sous-espaces vectoriels lagrangiens de T^*M , il s'agit de la *grassmannienne lagrangienne* de T^*M .

Définition. Une immersion lagrangienne $i: L \hookrightarrow T^*M$ définit une section du fibré vectoriel $i^*\Lambda(TT^*M)$, dite *application de Gauss*, par $Gi: x \mapsto T_x i(T_x L)$.

Nous transportons naturellement cette notion aux immersions legendriennes :

Définition. L'application de Gauss *lagrangienne* d'une immersion legendrienne est l'application de Gauss de sa projection lagrangienne.

Nous allons désormais voir que l'application de Gauss lagrangienne capture de nombreuses obstructions à l'existence d'une famille génératrice.

2.3.2. Le nombre de rotation, vers les classes de Maslov.

Nous associons à tout *nœud legendrien*¹¹ de \mathbb{R}^3 , un entier permettant de détecter une obstruction à l'existence d'une famille génératrice.

Nous commençons par observer que le cercle est *parallélisable*¹² de sorte que :

$$\Lambda(TT^*S^1) \cong S^1 \times \Lambda(\mathbb{R}^2),$$

où $\Lambda(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de (\mathbb{R}^2, ω_0) . Or, comme toute droite vectorielle de (\mathbb{R}^2, ω_0) est lagrangienne¹³, il vient :

$$\Lambda(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}P^1 \cong S^1.$$

Une section de $\Lambda(TT^*S^1) \cong S^1 \times S^1$ s'identifie alors à une application $S^1 \rightarrow S^1$, ce qui nous permet alors de dégager la notion suivante.

11. C'est un plongement legendrien de S^1 dans J^1S^1 .

12. Le fibré (co)tangent du cercle est trivialisable.

13. La forme symplectique standard ω_0 de \mathbb{R}^2 n'est rien d'autre que le déterminant de \mathbb{R}^2 . Or, en restriction à une droite vectorielle quelconque de \mathbb{R}^2 ce déterminant est nul.

Définition. Le *nombre de rotation* r d'un nœud legendrien est le degré de son application de Gauss lagrangienne.

Remarque. Le nombre de rotation d'un nœud legendrien compte les tours orientés fait par les tangentes à son diagramme lagrangien.

Exemple. Le nœud legendrien de la figure 2 a un nombre de rotation nul.

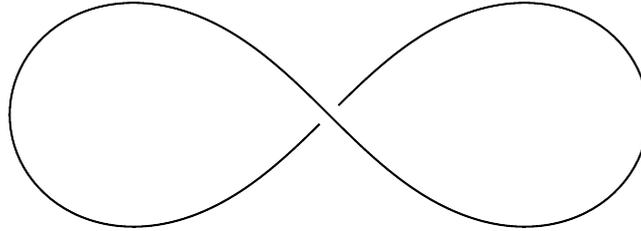


FIGURE 3. La projection lagrangienne d'un nœud legendrien trivial.

En pratique, il est souvent bien plus délicat de travailler avec le diagramme lagrangien d'un nœud legendrien plutôt qu'avec son front, c'est pourquoi nous décrivons maintenant le processus de conversion de l'un à l'autre.

Les correspondances entre le front legendrien et le diagramme lagrangien sont résumées dans le tableau suivant :

Front legendrien	Diagramme lagrangien

Exemple. Nous appliquons la correspondance front legendrien et diagramme lagrangien à un nœud de trèfle legendrien.

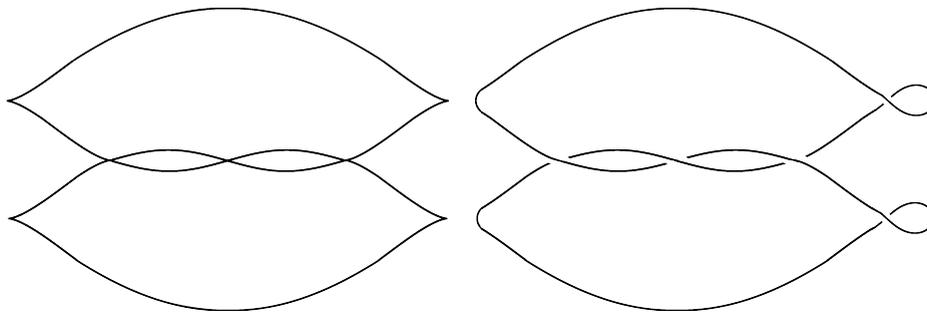


FIGURE 4. Un nœud de trèfle en projection frontale et lagrangienne.

Nous orientons les nœuds legendriens de (\mathbb{R}^3, ξ_0) en fixant une orientation de S^1 et nous en déduisons le calcul du nombre de rotation en projection frontale :

Proposition. Le nombre de rotation r d'un nœud legendrien est égal à

$$\frac{1}{2}(D - M),$$

où D , respectivement M , désigne le nombre de rebroussement descendants, respectivement, montants de son front legendrien.

Exemple. Nous représentons en projection frontale deux nœuds legendriens, le premier avec $r = 0$ et l'autre avec $r = 1$.

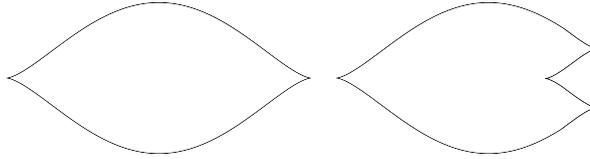


FIGURE 5. Les projections frontales de deux nœuds legendriens.

Nous discutons brièvement de la classification des nœuds legendriens.

Proposition. Le nombre de rotation est invariant par isotopie legendrienne.

Preuve. Une isotopie legendrienne entre deux nœuds legendriens induit une homotopie régulière entre les diagrammes lagrangiens qui leur sont associées, ainsi leurs applications de Gauss sont homotopes et elles ont le même degré. ■

Exemple. Les nœuds legendriens de la figure 5 sont topologiquement triviaux, mais il n'existe pourtant aucune isotopie legendrienne entre-eux, puisque leurs nombres de rotation sont différents.

Remarque. Nous venons de constater qu'une isotopie lisse entre sous-variétés legendriennes ne suffit pas pour garantir l'existence d'une isotopie legendrienne.

La topologie échoue à décrire les classes d'isotopies legendriennes :

Théorème. Une classe d'isotopie lisse d'une sous-variété legendrienne se scinde en une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinctes¹⁴.

Nous parlons de la *rigidité* des sous-variétés legendriennes, elles contiennent une information géométrique non-triviale sur la structure de contact elle-même.

Ce phénomène est véritablement surprenant, car les sous-variétés legendriennes sont de grande codimension dans les variétés de contact, elles sont «petites», mais elles sont excessivement difficile à transporter, elles sont «encombrantes».

La classification des sous-variétés legendriennes à isotopie legendrienne près est un problème riche et intéressant qui se trouve au cœur de mon doctorat.

14. Lorsque nous remplaçons une portion du front d'un nœud legendrien par un zigzag, son nombre de rotation varie d'une unité et sa classe d'isotopie legendrienne change.

Revenons désormais au problème d'existence de familles génératrices.

Définition. Un *potentiel de Maslov* d'un nœud legendrien est une distribution d'entiers μ sur les *branches*¹⁵ de son front legendrien qui satisfait :

$$(\star) \quad \mu(b_+) = \mu(b_-) + 1,$$

pour toute paire (b_+, b_-) de branches concourantes avec b_+ au-dessus¹⁶ de b_- .



FIGURE 6. Deux de paires branches d'un front legendrien qui se rejoignent.

Exemple. Voici un potentiel de Maslov pour un nœud de trèfle legendrien.

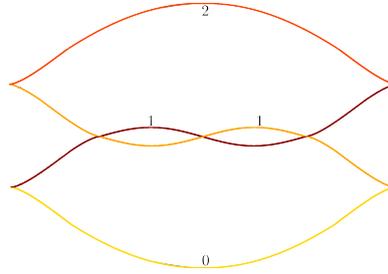


FIGURE 7. Le front d'un nœud de trèfle et un potentiel de Maslov.

Proposition. Un nœud legendrien peut être muni d'un potentiel de Maslov si, et seulement, si son nombre de rotation est nul.

Preuve. Nous considérons un nœud legendrien avec un nombre de rotation nul et nous observons qu'en parcourant son front legendrien dans le sens horaire, nous remontons autant de points de rebroussement que nous en descendons.

Nous pouvons ainsi définir un potentiel de Maslov sur ce nœud legendrien en suivant le procédé décrit ci-dessous :

- Nous attribuons un entier i à la branche la plus basse de son front.
- Nous parcourons son front à partir de sa branche la plus basse et nous numérotions les branches rencontrées en respectant la règle (\star) .

Notre observation initiale, nous assure que cette numérotation est cohérente, ce procédé est illustré sur la figure 7 en prenant $i = 0$.

Réciproquement, tous les potentiels de Maslov d'un nœud legendrien donné sont décrits par le procédé ci-dessus et comme cette numérotation est cohérente, son front doit contenir autant de rebroussement montants que descendants. Le nombre de rotation de ce nœud legendrien est donc nul. ■

15. Il s'agit des portions lisses maximales pour l'inclusion du front legendrien.

16. La courbe b_+ est au-dessus de b_- dans le plan de coordonnées (x, z) .

Faisons enfin le lien entre famille génératrice et nombre de rotation.

Théorème. Si un nœud legendrien admet une famille génératrice, alors son nombre de rotation est nul.

Preuve. Nous allons associer un potentiel de Maslov à une famille génératrice d'un nœud legendrien, ce qui nous permettra directement de conclure.

Soit $f: S^1 \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une famille génératrice pour un nœud legendrien donné, alors deux branches de son front se rencontrent au-dessus d'une abscisse x_0 si, et seulement, s'il y a naissance ou mort d'un point critique dans $(f_x)_x$ en $x = x_0$.

Notre problème s'inscrit alors très précisément dans la théorie de Morse-Cerf, pour laquelle nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage [14] de John Milnor. Pour notre étude, nous nous contentons d'en rappeler le résultat suivant.

Théorème. Soit $(f_x: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R})_{x \in \mathbb{R}}$ une famille à un paramètre d'applications. S'il y a naissance ou mort d'un point critique p_0 dans $(f_x)_{x \in \mathbb{R}}$ à l'instant $x = 0$, alors pour tous les x suffisamment petits, il existe un certain voisinage de p_0 contenant exactement deux points critiques $p_{\pm}(x)$ de f_x avec $p_-(x) < p_+(x)$. Ces deux points critiques satisfont de plus la relation suivante :

$$\text{ind}_{p_+(x)}(f_x) = \text{ind}_{p_-(x)}(f_x) + 1,$$

où ind désigne l'indice de Morse d'une application en un point critique.

Preuve. Des considérations homologiques analogues à celles que nous allons détailler dans la section suivante permettent d'obtenir facilement le résultat. ■

Soit b une branche du front du nœud legendrien considéré, nous définissons :

$$\mu(b) = \text{ind}_v(f_x),$$

où x ne se trouve en-dessous d'aucun branchement du front et $(x, f_x(v)) \in b$. Le théorème ci-dessus nous assure que μ est un potentiel de Maslov. ■

La *première classe de Maslov*, notée m_1 , d'une sous-variété lagrangienne ou legendrienne généralise le nombre de rotation dans les dimensions supérieures. Nous esquissons seulement sa définition dans un cas particulier générique.

Soit $i: L \looparrowright T^*M$ une immersion lagrangienne pour laquelle nous avons :

$$i^*\Lambda(TT^*M) \cong L \times \Lambda(\mathbb{R}^{2n}).$$

En d'autres termes, nous supposons que le fibré $i^*\Lambda(TT^*M)$ est trivialisable, ce qui nous permet d'identifier l'application de Gauss de i à $\text{Gi}: L \rightarrow \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$. Le groupe fondamental de $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ étant infini cyclique¹⁷, nous posons :

$$m_1 = \text{Gi}^*u \in H^1(L, \mathbb{Z}),$$

où u est un générateur « distingué » du groupe fondamental de $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$.

17. L'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ s'identifie à $U(n)/O(n)$.

Nous transposons immédiatement la notion de première classe de Maslov aux immersions legendriennes via leurs projections lagrangiennes.

Exemple. Le nombre de rotation et la première classe de Maslov coïncident dans le cas où $L = S^1 = M$.

Nous mentionnons que l'application de Gauss d'une immersion lagrangienne permet également de définir des invariants cohomologiques dans tous les degrés, il s'agit des classes de Maslov ; nous renvoyons à l'article [7] de Dmitry Fuchs.

2.3.3. Les zigzags des fronts legendriens.

Nous quittons temporairement les considérations de topologie algébrique pour évoquer une obstruction forte à l'existence d'une famille génératrice.

Proposition. Si le front d'une sous-variété legendrienne contient un zigzag, alors elle n'admet pas de famille génératrice.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un nœud legendrien dont le front contienne un zigzag, mais qui admet tout de même une famille génératrice f .

Notons x_0 et x_1 des abscisses qui délimitent un zigzag du front avec $x_0 < x_1$ et choisissons aussi a et b des valeurs régulières avec $a < b$ qui encadrent au sens strict toutes les valeurs critiques des applications f_x , pour tout $x \in [x_0, x_1]$. Introduisons i l'indice de Morse de f_{x_0} en v_0 choisi tel que $(v_0, f_{x_0}(v_0))$ soit un point de la branche la plus basse de la portion du front comprise entre x_0 et x_1 .

La situation est résumée sur la figure suivante :

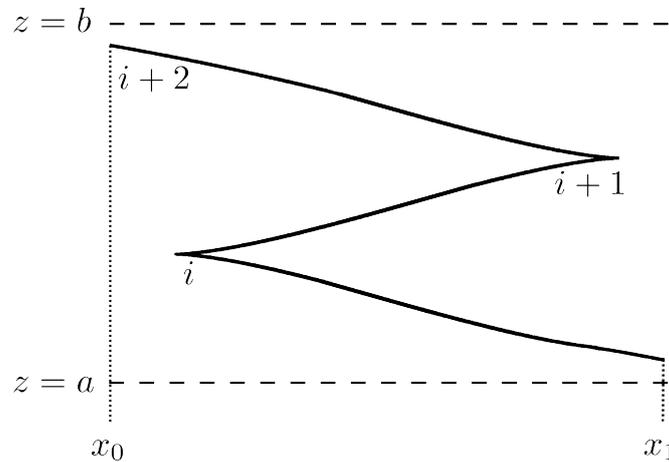


FIGURE 8. Un zigzag d'un front legendrien.

Par un résultat facile de théorie de Morse générale, le module gradué suivant :

$$H_\bullet(\{f_x \leq b\}, \{f_x \leq a\})$$

est indépendant de l'abscisse x , pourtant il est concentré en degré i en $x = x_0$, mais concentré en degré $i + 2$ en $x = x_1$, une contradiction. ■

Nous en déduisons que le nombre de rotation ne permet pas à lui seul d'encoder toutes les obstructions à l'existence d'une famille génératrice.

Exemple. La sous-variété legendrienne dont le front est représenté ci-dessous à un nombre de rotation nul et n'admet pourtant pas de famille génératrice.

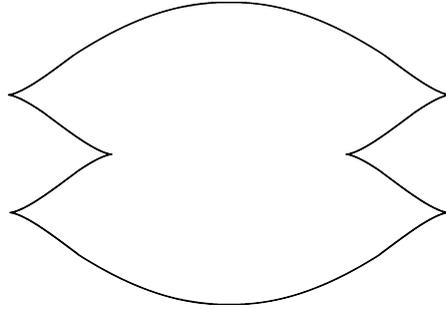


FIGURE 9. Un front avec $r = 0$ n'étant pas un diagramme de Cerf.

2.3.4. *Les travaux de Sylvain Courte et Stéphane Guillermou.*

Nous présentons un résultat qui garantit l'existence d'une famille génératrice sous réserve d'une condition homotopique sur l'application de Gauss.

Définition. Une immersion lagrangienne $i: L \looparrowright T^*M$ induit une section du fibré vectoriel $i^*\Lambda(TT^*M)$, dite *verticale*, définie par $V_i(x) := T_{i(x)}T^*L$.

Définition. Une immersion lagrangienne $i: L \looparrowright T^*M$ est *stablement triviale* lorsqu'il existe un entier naturel N tel que G_i et V_i soient homotopes en tant que sections du fibré vectoriel $i^*\Lambda(TT^*(M \times \mathbb{R}^N))$.

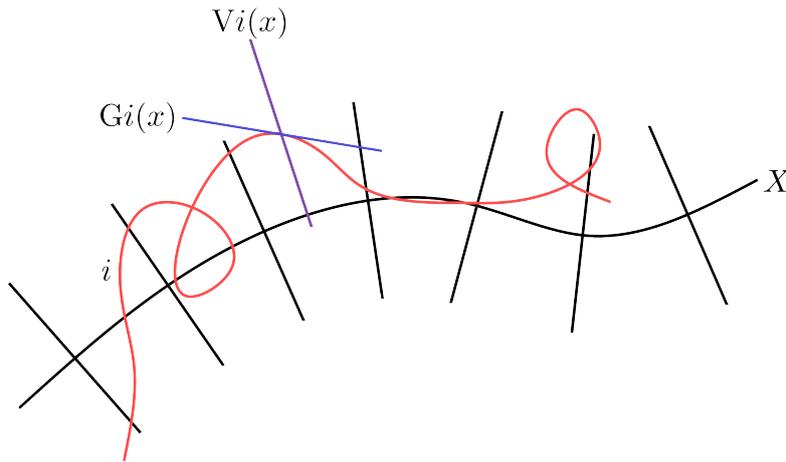


FIGURE 10. Une représentation schématique de l'application de Gauss et de la section verticale d'une immersion lagrangienne.

Les notions homotopiques nécessaires à la formulation du résultat étant posées, nous imposons le comportement à l'infini de nos familles génératrices.

Définition. Une famille génératrice $f: M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est *domptée à l'infini* lorsqu'il existe deux compacts $K \subset M \times \mathbb{R}$ et $K' \subset M \times \mathbb{R}^N$ tels que :

$$p_f: M \times \mathbb{R}^N \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

$$(x, v) \mapsto (x, f(x, v))$$

induit des fibrations $p_f^{-1}(M \times \mathbb{R} \setminus K) \rightarrow M \times \mathbb{R} \setminus K$ et $p_f^{-1}(K) \setminus K' \rightarrow K$.

Exemple. Les familles génératrices respectivement linéaires et quadratiques non-dégénérées à l'infini sont domptées à l'infini.

Remarque. Une famille génératrice seule n'encode que peu d'information géométrique de la legendrienne, mais en imposant un certain contrôle sur son comportement à l'infini, nous pallions bien souvent cette limitation.

Par exemple, les familles génératrices linéaires à l'infini possèdent une théorie de Morse suffisamment agréable pour définir des invariants homologiques fins des sous-variétés legendriennes, voir les articles [2] et [8].

L'essentiel de mon doctorat consistera à dégager des résultats structuraux pour l'un de ces invariants, à savoir l'homologie pour paire de familles génératrices. Mon travail devrait aboutir à une meilleure compréhension de cet invariant encore excessivement difficile à calculer, ainsi qu'à une meilleure appréhension de la diversité des sous-variétés legendriennes.

Nous énonçons enfin le résultat de Sylvain Courte et Stéphane Guillermou, il s'agit de travaux encore non-publiés pour le moment.

Théorème (S. Courte, S. Guillermou, en cours). Un plongement lagrangien exact stablement trivial admet une famille génératrice domptée à l'infini.

Preuve. La preuve est relativement accessible et ne présente pas de difficultés, mais afin de conserver une certaine concision avec laquelle ce rapport est écrit, nous l'évoquons seulement dans ses grandes lignes.

L'immersion lagrangienne considérée étant stablement triviale, un théorème d'Emmanuel Giroux ([10], 1988) en procure une famille génératrice semi-locale. Nous en déduisons alors une famille génératrice domptée à l'infini pour une version dédoublée de l'immersion lagrangienne de départ, voir la figure 11.

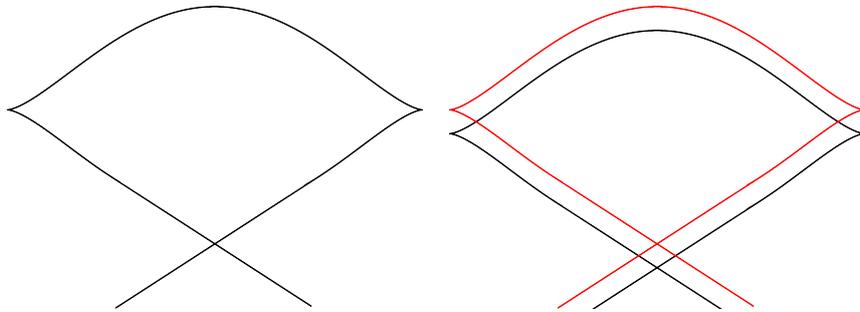


FIGURE 11. Une schématisation de l'opération de dédoublement.

Nous récupérons alors l'immersion lagrangienne initiale en séparant ces deux copies et comme elles sont plongées, la séparation est une isotopie legendrienne. Finalement, le théorème de persistance [5] nous assure que la famille génératrice domptée à l'infini est conservée à l'issue de la transformation. ■

Remarque. Nous insistons, l'hypothèse de plongement est cruciale !

Sylvain Courte et Stéphane Guillermou cherchent actuellement à s'affranchir de l'hypothèse homotopique du théorème quitte à travailler avec une version globale des familles génératrices qui sont dites *tordues*.

Conjecture (S. Courte, S. Guillermou, théorème en cours). Si une sous-variété lagrangienne exacte de T^*M est hamiltonniennement isotope à la section nulle, alors elle admet une famille génératrice tordue.

CONCLUSION

Je n'avais, avant *Topologie différentielle et mathématiques d'aujourd'hui*, jamais assisté à un cycle complet de conférences thématiques, mais seulement à des séminaires de l'équipe Topologie et Dynamique de l'Université Paris-Sud.

J'ai parfois éprouvé des difficultés à comprendre certaines des présentations, mais elles ont toujours été bénéfiques, puisque j'ai réellement apprécié mettre en parallèle les résultats discutés avec les connaissances que l'on m'a enseignées. Je pense également avoir mieux pris conscience des nombreuses interactions qui existent entre les différents domaines de la topologie différentielle moderne. Par ailleurs, j'ai commencé à prendre légèrement confiance en mon expertise naissante en topologie symplectique et de contact en constatant mon aisance avec le contenu des exposés d'Anne Vaugon et Sylvain Courte.

J'estime que les trois jours de cette conférence constituent un complément essentiel à ma formation : j'en tire des leçons pour réaliser un exposé réussi, comme la pertinence d'énoncer précocement les résultats qui vont être présentés. Cette règle s'appliquant même s'ils nécessitent des notions techniques qui ne seront présentées que bien plus tard, cela permet de laisser un fil directeur clair. Finalement, l'écriture de ce rapport m'a également été instructif, puisqu'il m'a permis de communiquer synthétiquement sur mes intérêts de recherche.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Abouzaid et T. Kragh. On the immersion classes of nearby Lagrangian. *Journal of Topology*, 9 :1753–8424, 2016.
- [2] F. Bourgeois, J. Sabloff, et L. Traynor. Lagrangian cobordisms via generating families : Construction and geography. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(4) :2439–2477, 2015.
- [3] J. Cerf. *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), volume 53 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1968.
- [4] J. Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 39(1) :7–170, 1970.

- [5] Y. Chekanov. Critical points of quasifunctions and generating families of Legendrian manifolds. *Functional Analysis and Its Applications*, 30(2) :118–128, 1996.
- [6] G. Dimitroglou Rizell, E. Goodman, et A. Ivril. Lagrangian isotopy of tori in $S^2 \times S^2$ and $\mathbb{C}P^2$. *Geometric and Functional Analysis*, 26(5) :1297–1358, 2016.
- [7] D. Fuchs. Maslov-Arnold characteristic classes. *Soviet Mathematics Doklady*, 9 :96–99, 1968.
- [8] D. Fuchs et D. Rutherford. Generating families and legendrian contact homology in the standard contact space. *Journal of Topology*, 4 :190–226, 2011.
- [9] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [10] E. Giroux. Formes génératrices d’immersions lagrangiennes. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences de Paris, Série I*, 306(18) :761–764, 1988.
- [11] R. Hind. Lagrangian spheres in $S^2 \times S^2$. *Geometric Functional Analysis*, 14(2) :303–318.
- [12] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64(2) :399–405, 1956.
- [13] J. Milnor. Differentiable structures on spheres. *American Journal of Mathematics*, 81(4) :962–972, 1959.
- [14] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [15] J.-C. Sikorav. Problèmes d’intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne. *Commentarii mathematici Helvetici*, 62 :62–73, 1987.
- [16] S. Smale. Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics*, 74(2) :391–406, 1961.